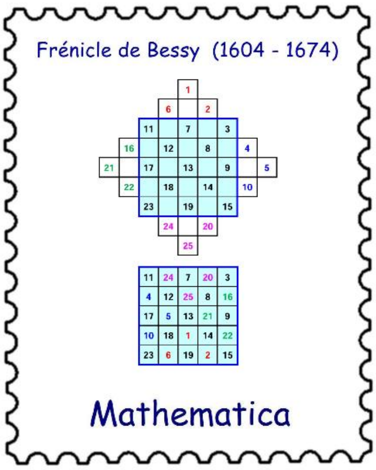
Januar 2025

Vor 400 Jahren lebte **Frénicle de Bessy** (1604 – 1674)



Er korrespondierte mit Pierre de Fermat, René Descartes, Christiaan Huygens, Marin Mersenne und John Wallis; auch gehörte er im Jahr 1666 zu den Gründungsmitgliedern der *Académie Royale des Sciences*. Trotz der Kontakte zu zeitgenössischen Mathematikern weiß man nur sehr wenig über Bernard Frénicle de Bessy. Ob er tatsächlich 1604 geboren wurde (oder erst 1605), ist nicht bekannt; auch über seinen Todestag liegen keine Informationen vor.

Frénicle de Bessy stammte aus einem alten Adelsgeschlecht Frankreichs; sein Vater war der *Conseiller à la Cour des Monnaies* Bernard de Bessy, also am obersten Gericht für Fragen des Münzwesens und der Staatsfinanzen tätig, verantwortlich auch für die Verwaltung und Produktion der 30 Münzprägeanstalten Frankreichs – ein zeitaufwendiges Amt, das sein Sohn Frénicle nach erfolgreich absolviertem Jurastudium erbte.

Seine Freizeit widmete Frénicle vor allem dem Studium der Eigenschaften natürlicher Zahlen. Aus dem Nachlass der Briefe Mersennes weiß man, dass er sich auch mit physikalischen Problemen beschäftigte, unter anderem mit Galileo Galileis *Dialog über die zwei wichtigsten Weltsysteme.*

Wiederholt löste er – in Rekordzeit – numerische Probleme, die Fermat als Herausforderungen seinen Briefpartnern gestellt hatte; eine seiner Lösungen veröffentlichte er (*solutio*, 1657). Im Jahr 1693, also viele Jahre nach Frénicles Tod, gab Philippe de la Hire im Auftrag der *Académie* vier seiner Abhandlungen (*Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique*), auf die wir weiter unten eingehen.

Heute erinnert noch *ein* Begriff aus dem Bereich der Unterhaltungsmathematik an den französischen Rechenkünstler: Unter den acht möglichen Formen eines magischen 3x3-Quadrates wird die rechts stehende Anordnung als Frénicle-Standard-Form bezeichnet (die übrigen Formen erhält man durch Drehung und Spiegelung aus dieser).

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Zu den von FERMAT gestellten Problemen gehörte die Aufgabe, Kubikzahlen zu finden, für die die Summe *aller* Teiler (einschl. der Zahl selbst) eine Quadratzahl ist, sowie die Aufgabe, Quadratzahlen zu finden, für die die Summe *aller* Teiler eine Kubikzahl ist.

Beispiel für das erste Problem: Summe *aller* Teiler der Zahl $7^3 = 343$ ist $7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 = 400 = 20^2$.

FRÉNICLE ergänzte die Liste der Probleme, beispielsweise:

- Finde eine natürliche Zahl n, bei der die Summe der *echten* Teiler 5-mal so groß ist wie die Zahl selbst und auch die Summe der *echten* Teiler des 5-Fachen dieser Zahl 25-mal so groß ist wie $5n$.
- Finde eine natürliche Zahl n, bei der die Summe der *echten* Teiler 7-mal so groß ist wie die Zahl selbst und auch die Summe der *echten* Teiler des 7-Fachen dieser Zahl 49-mal so groß ist wie $7n$.
- Finde zwei aufeinanderfolgende Kubikzahlen, deren Differenz selbst eine Kubikzahl ist.

Außerdem stellte er einige Aufgaben, die mit Sechseckzahlen zusammenhängen. Und dass 1729 die kleinste Kubikzahl ist, die sich auf zwei Arten als Summe von zwei Kubikzahlen darstellen lässt, findet man bereits bei FRÉNICLE – und nicht erst in SRINIVASA RAMANUJANS *taxicab problem*.

Die erste der posthum veröffentlichten Abhandlungen FRÉNICLEs trägt den Titel *Méthode pour trouver la Solution des Problèmes par Exclusion* – in dieser 85-seitigen „Methode durch Ausschließung" ging es ihm insbesondere darum zu erläutern, wie man – ausgehend von einfachen Beispielen – durch systematisches Erfassen von Gemeinsamkeiten auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten schließen kann. Die meisten der dabei betrachteten Beispiele beschäftigen sich mit ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecken.

Seit EUKLID war bekannt, wie *primitive* pythagoreische Zahlentripel *erzeugt* werden können: Sind a, b zwei beliebige zueinander teilerfremde Zahlen, dann erfüllt das Tripel $(a^2-b^2; 2ab; a^2+b^2)$ die gewünschte Bedingung. Dies wendet FRÉNICLE an …

- Gesucht sind zwei Quadratzahlen, deren Differenz eine bestimmte Quadratzahl ergibt.

Beispiel (*gerade Quadratzahl*): $144 = 12^2$, teile die Zahl durch 4 und zerlege das Ergebnis in Faktoren: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$. Bilde dann für die Summe und die Differenz dieser Faktoren jeweils die Differenz der Quadrate: Aus den (erzeugenden) Faktoren 1, 36 ergeben sich die Zahlen 35, 37, und weiter: $37^2 - 35^2 = 144$. Aus 2, 18 ergeben sich die Zahlen 16, 20, und weiter: $20^2 - 16^2 = 144$. Aus 3, 12 ergeben sich die Zahlen 9, 15, und weiter: $15^2 - 9^2 = 144$. Aus 4, 9 ergeben sich die Zahlen 5, 13, und weiter: $13^2 - 5^2 = 144$.

Beispiel (*ungerade Quadratzahl*): $81 = 9^2 = 1 \cdot 81 = 3 \cdot 27$. Aus den Faktoren 1, 81 erhält man die Zahlen 80, 82. Wenn man diese halbiert, findet man: $41^2 - 40^2 = 81$; analog ergeben sich aus den Faktoren 3, 27 die Zahlen 24, 30, diese halbiert, ergibt: $15^2 - 12^2 = 81$.

- Gesucht sind ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke, deren Kathetenlängen sich um einen bestimmten Betrag unterscheiden.

Beispiel: Die pythagoreischen Zahlentripel (5; 12; 13) und (15; 8; 17) gehören zu den ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecken, deren Kathetenlängen sich um 7 unterscheiden. Weitere Beispiele lassen sich finden, indem man geeignete Zahlenfolgen für die erzeugenden Faktoren a, b findet:

a	b	b^2-a^2	$2ab$	a^2+b^2
2	3	5	12	13
3	8	55	48	73
8	19	297	304	425
19	46	…	…	…

a	b	b^2-a^2	$2ab$	a^2+b^2
1	4	15	8	17
4	9	65	72	97
9	22	403	396	565
22	53	…	…	…

Einige seiner Fragestellungen führen zu erstaunlich großen Zahlen …

- Gesucht ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die Länge der Hypotenuse sowie die Summe der Kathetenlängen eine Quadratzahl ist. (*Lösung*: Kathetenlängen: 1.061.652.293.520, 4.565.486.027.761, Hypotenusenlänge: 4.687.298.610.289)
- Gesucht ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die Länge der Hypotenuse eine Quadratzahl ist und der Längenunterschied der kürzeren Kathete zu den beiden anderen Seiten ebenfalls eine Quadratzahl ist. (*Lösung*: Katheten: 473.304, 2.276.953, Hypotenuse: 2.325.625)

In einer weiteren nachgelassenen Schrift, dem 79 Seiten umfassenden *Traité des Triangles rectangles en Nombres* (Abhandlung über ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke) geht FRÉNICLE zunächst systematisch auf Eigenschaften von Quadratzahlen ein:

- Quadratzahlen können nicht auf 2, 3, 7 oder 8 enden. Ist die letzte Ziffer 1, 4 oder 9, dann muss die vorletzte Ziffer gerade sein. Ist die letzte Ziffer eine 6, dann muss die vorletzte Ziffer ungerade sein.
- Quadratzahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, lassen bei Division durch 3 den Rest 1.
- Ungerade Quadratzahlen lassen bei Division durch 8 den Rest 1; ungerade Quadratzahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, lassen bei Division durch 24 den Rest 1.
- Quadratzahlen, die nicht durch 5 teilbar sind, lassen bei der Division durch 5 die Reste 1 oder -1.

Weiter entdeckt FRÉNICLE eine bemerkenswerte Eigenschaft:

- Sind x, y die Katheten und z die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dann bilden das Quadrat der Differenz der beiden Kathetenlängen, das Quadrat der Hypotenusenlänge und das Quadrat der Summe der beiden Kathetenlängen eine arithmetische Folge: $(y-x)^2$, x^2+y^2, $(x+y)^2$.
  Beispiel: $x = 5$, $y = 12$: $(y-x)^2 = 49$; $x^2+y^2 = 169$; $(x+y)^2 = 289$

Bei den pythagoreischen Zahlentripeln spielen Primzahlen, die nach Division durch 4 den Rest 1 lassen (5, 13, 17, 29, 37, …), eine besondere Rolle. FRÉNICLE stellt fest:

- Diese Primzahlen sind eindeutig als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar ($5 = 1^2+2^2$, $13 = 2^2+3^2$, $17 = 1^2+4^2$, $29 = 2^2+5^2$, $37 = 1^2+6^2$, …); zugehörige primitive Tripel: $(2^2-1^2; 2\cdot1\cdot2; 1^2+2^2) = (3; 4; 5)$, $(3^2-2^2; 2\cdot2\cdot3; 2^2+3^2) = (5; 12; 13)$, $(4^2-1^2; 2\cdot1\cdot4; 1^2+4^2) = (15; 8; 17)$, …
- Produkte von *zwei* verschiedenen Primzahlen dieses Typs sind auf *zwei* Arten darstellbar ($65 = 5\cdot13 = 1^2+8^2 = 4^2+7^2$, $85 = 5\cdot17 = 2^2+9^2 = 6^2+7^2$, $13\cdot17 = 221 = 5^2+14^2 = 10^2+11^2$, …); zugehörige primitive Tripel: (63; 16; 65), (33; 56; 65) bzw. (77; 36; 85), (13; 84; 85) bzw. (171; 140; 221), (21; 220; 221), …
- Produkte von *drei* verschiedenen Primzahlen sind auf *vier* Arten darstellbar, z. B. $1105 = 5\cdot13\cdot17 = 4^2+33^2 = 9^2+32^2 = 12^2+31^2 = 23^2+24^2$), zugehörige Tripel: (264; 1073; 1105), (576; 943; 1105), (744; 817; 1105), (47; 1104; 1105), …
- Produkte von *vier* verschiedenen Primzahlen des Typs sind auf *acht* Arten darstellbar, Produkte von *fünf* verschiedenen Primzahlen des Typs sind auf *sechzehn* Arten darstellbar usw.
- Zu diesen *primitiven* pythagoreischen Zahlentripeln findet man im Falle des Produkts von zwei verschiedenen Primzahlen zwei weitere Vielfachtripel, z. B. $5\cdot(5; 12; 13) = (25; 60; 65)$ und $13\cdot(3; 4; 5) = (39; 52; 65)$, im Falle des Produkts von drei verschiedenen Primzahlen gibt es neun Vielfachtripel, von vier Primzahlen 32 Vielfachtripel usw.
- Insgesamt gibt es für Produkte aus 2 verschiedenen Primzahlen dieses Typs 2+2 = 4 Tripel, aus 3 verschiedenen Primzahlen 4+9 = 13 Tripel, aus 4 verschiedenen Primzahlen 8+32 = 40 Tripel, aus 5 Primzahlen 16+105 = 121 Tripel, aus 6 verschiedenen Primzahlen 32+332 = 364 Tripel, …

Der Rechenkünstler FRÉNICLE scheut sich nicht, im Falle von 4 Primzahlen für ein Beispiel alle vierzig Tripel zu bestimmen.

Weiter untersucht er die Anzahl der *primitiven* pythagoreischen Tripel für Potenzen sowie für Produkte von Potenzen von Primzahlen $a, b \in \{5, 13, 17, 29, \dots\}$:

Potenz	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
Anzahl	1	1	2	2	3	3

Potenz	$a \cdot b$	$a \cdot b^2$	$a \cdot b^3$	$a \cdot b^4$	$a \cdot b^5$	$a \cdot b^6$
Anzahl	2	3	4	5	6	7

Potenz	$a^2 \cdot b$	$a^2 \cdot b^2$	$a^2 \cdot b^3$	$a^2 \cdot b^4$	$a^2 \cdot b^5$	$a^2 \cdot b^6$
Anzahl	3	4	6	7	9	10

Potenz	$a^3 \cdot b$	$a^3 \cdot b^2$	$a^3 \cdot b^3$	$a^3 \cdot b^4$	$a^3 \cdot b^5$	$a^3 \cdot b^6$
Anzahl	4	6	8	10	12	14

Weitere Sätze beschäftigen sich mit dem Zusammenhang zwischen den erzeugenden Zahlen und den Vielfachen der pythagoreischen Tripel:

- Vervielfacht man die erzeugenden Zahlen eines primitiven pythagoreischen Tripels mit einer natürlichen Zahl, dann vervielfachen sich die Zahlen des Tripels mit dem Quadrat dieser Zahl und umgekehrt. Auch wenn man die Zahlen eines primitiven pythagoreischen Tripels mit dem Doppelten einer Quadratzahl vervielfacht, existiert ein Paar erzeugender Zahlen; bei anderen Vielfachen eines primitiven pythagoreischen Tripels existiert ein solches Paar allerdings nicht.

a	b		b^2-a^2	$2ab$	a^2+b^2	
1	2	↔	3	4	5	
2	4	↔	12	16	20	↵ · 4
3	6	↔	27	36	45	↵ · 9
4	8	↔	48	64	80	↵ · 16

1	2	↔	3	4	5	
1	3	←	6	8	10	↵ · 2
2	6	←	32	24	40	↵ · 8
3	9	←	72	54	90	↵ · 18
4	12	←	128	96	160	↵ · 32

a	b	↔	b^2-a^2	$2ab$	a^2+b^2	
1	2	↔	3	4	5	
–	–		9	12	15	↵ · 3
–	–		15	20	25	↵ · 5
–	–		21	28	35	↵ · 7

FRÉNICLE beweist u. a. auch noch die folgenden Eigenschaften:

- Die Differenz der Seitenlängen der Hypotenuse und der Kathete mit ungerader Seitenlänge in einem ganzzahligen primitiven rechtwinkligen Dreieck ist das Doppelte einer Quadratzahl, die Summe und die Differenz der Seitenlängen der Hypotenuse und der Kathete mit gerader Seitenlänge ist eine Quadratzahl.
- Die Länge der Hypotenuse eines ganzzahligen primitiven rechtwinkligen Dreiecks ist nicht durch 3 teilbar. Die Seitenlänge einer der Katheten eines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks ist durch 3 teilbar. Die Seitenlänge einer der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist durch 4 teilbar. Daher kann es kein ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck geben, bei dem die Seitenlängen der beiden Katheten Primzahlen sind.
- Eine der Seitenlängen eines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks ist durch 5 teilbar.
- In einem ganzzahligen primitiven rechtwinkligen Dreieck lässt sowohl die Summe als auch die Differenz der Seitenlängen der Katheten bei Division durch 8 den Rest -1 oder +1.
- Der Flächeninhalt eines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks ist stets durch 6 teilbar.
- Es gibt kein ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck mit quadratischem oder mit doppelt-quadratischem Flächeninhalt.

Schließlich gibt FRÉNICLE eine allgemeine Methode für das Problem an, zu einem ganzzahligen rechtwinkligen Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt zu finden. Er geht dabei so vor, wie in der Tabelle rechts ablesbar. Das Zahlenbeispiel in der Tabelle darunter führt von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 3 und 4 zu einem Dreieck mit den Kathetenlängen $\frac{7}{10}$ und $\frac{120}{7}$ – beide mit Flächeninhalt 6.

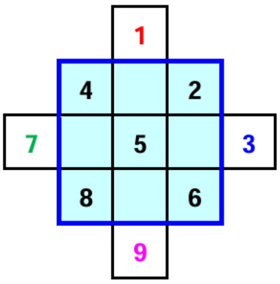
	Kathete 1	Kathete 2	Hypotenuse	Fläche	
Ausgangsdreieck	A	B	C	½ AB	
Hilfsdreieck 1	D := B² – A²	2AB	C² = A² + B²	ABD	↵ ·2D
Hilfsdreieck 2	D²	4ABC²	E := A²B² + C⁴	2ABC²D²	↵ ·2C²D
Lösung	D/2C	2ABC/D	E/2CD	½ AB	

	Kathete 1	Kathete 2	Hypotenuse	Fläche	
Ausgangsdreieck	3	4	5	6	
Hilfsdreieck 1	7	24	25	84	↵ ·2·7
Hilfsdreieck 2	49	1200	1201	4900	↵ ·2·5²·7
Lösung	7/10	120/7	1201/70	6	

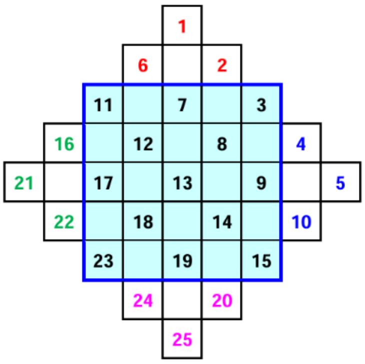
Mithilfe dieses allgemeinen Ansatzes entdeckt er beispielsweise: (20; 21; 29) und (12; 35; 37) haben beide den ganzzahligen Flächeninhalt 210; die Dreiecke (48; 55; 73) und (22; 120; 122) den Flächeninhalt 1320, die Dreiecke (27; 364; 365) und (39; 252; 255) den Flächeninhalt 4914.

FRÉNICLE fand sogar Beispiele, bei denen drei ganzzahlige Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, u. a. (56; 390; 394), (105; 208; 233) und (120; 182; 218) mit Flächeninhalt 10920. Im einem Beispiel mit sechs gleich großen ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecken ergibt sich für den Flächeninhalt eine Zahl mit 32 Stellen.
In einer weiteren Schrift, der 39-seitigen Abhandlung *Abregé des Combinaisons*, erläutert FRÉNICLE anhand zahlreicher Beispiele die wichtigsten Regeln der Kombinatorik; er geht dabei nicht über die bis dahin bekannten Fragestellungen hinaus.

Die letzte der vier Schriften trägt den Titel *Des Quarréz ou Tables Magique* und umfasst 146 Seiten. Ohne Hinweise auf eventuell benutzte Quellen beschreibt FRÉNICLE verschiedene Verfahren, mit deren Hilfe magische Quadrate erzeugt werden können. Nach der Erläuterung der Grundregeln stellt er zunächst eine Methode vor, die bei magischen Quadraten mit *ungerader* Ordnung (Seitenlänge) anwendbar ist: Die außerhalb des eingerahmten Quadrats stehenden Zahlen werden in die jeweils waagerecht bzw. senkrecht am weitesten entfernten Zellen verschoben (vgl. die folgenden Beispiele). Durch symmetrisches Vertauschen von Zeilen und Spalten können hieraus weitere Varianten entwickelt werden.



4	9	2
3	5	7
8	1	6



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Für 4x4-Quadrate erläutert FRÉNICLE eine Methode, bei der die Diagonalelemente des Startquadrats (schwarz) stehen bleiben, die übrigen Elemente werden gespiegelt – die magische Summe des Quadrats beträgt 34.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Ein 4x4-Quadrat lässt sich dann gemäß der sog. *Rahmenmethode* auf ein 6x6-Quadrat erweitern (magische Zahl: 111), indem man beispielsweise zunächst die Zahlen von 1 bis 8 und von 29 bis 36 berücksichtigt (magische Zahl: 74) und dann im Rahmen die übrigen Zahlen so ergänzt, dass einander gegenüberliegende Zahlen jeweils die fehlende Summe 37 ergeben.
Auf den folgenden Seiten erläutert FRÉNICLE dann die nächsten Konstruktionsschritte – bis hin zu einem magischen 14x14-Quadrat.

	1	35	34	4	
	32	6	7	29	
	8	30	31	5	
	33	3	2	36	

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Die Rahmenmethode lässt sich auch auf magische Quadrate mit ungerader Ordnung anwenden. Da es verschiedene Möglichkeiten gibt, die Zahlen für das innere Quadrat auszuwählen, können entsprechend auch unterschiedliche erweiterte Quadrate erzeugt werden, wie FRÉNICLE ausführlich darlegt. – Den Abschluss seines Beitrags bildet eine Liste aller 880 magischen Quadrate 4. Ordnung. Da jedes dieser Quadrate durch Drehungen und Spiegelungen auf acht verschiedene Arten dargestellt werden kann, gibt es insgesamt $8 \cdot 880 = 7040$ magische Quadrate 4. Ordnung.

Heinz Klaus Strick, Leverkusen 2025