Herleitung für die Gesamtenergie einer Ellipsenbahn

Die Gesamtenergie $E_0 = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ ist überall auf der Ellipse gleich groß. In großer Entfernung vom Zentralkörper ist E_{pot} größer und E_{kin} kleiner, in der Nähe ist es umgekehrt.

Da sich die ISS um die Erde und nicht um die Sonne bewegt, müsste man hier eigentlich statt Aphel **Apogäum** und statt Perihel **Perigäum** schreiben.

Für Perihel gilt $E_0 = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Perihel}}^2 - \frac{G \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{M}}{r_{Perihel}}$; für Aphel gilt $E_0 = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Aphel}}^2 - \frac{G \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{M}}{r_{Aphel}}$
Multiplizieren der Gleichungen mit $r^2_{Perihel}$ bzw. r^2_{Aphel} führt zu den Gleichungen

$$E_0 \cdot {r_{Perihel}}^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Perihel}}^2 \cdot {r_{Perihel}}^2 - G \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{M} \cdot r_{Perihel} \tag{1}$$

$$E_0 \cdot {r_{Aphel}}^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Aphel}}^2 \cdot {r_{Aphel}}^2 - G \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{M} \cdot r_{Aphel} \tag{2}$$

Außerdem gilt: $\boxed{v_{Perihel} \cdot r_{Perihel} = v_{Aphel} \cdot r_{Aphel}} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot {v_{Perihel}}^2 \cdot {r_{Perihel}}^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_{Aphel}}^2 \cdot {r_{Aphel}}^2$.

Zieht man Gleichung (1) von Gleichung (2) ab, so ergibt sich:

$$E_0 \cdot r^2_{Aphel} - E_0 \cdot r^2_{Perihel} = -G \cdot m \cdot M \cdot r_{Aphel} + G \cdot m \cdot M \cdot r_{Perihel}$$

$$\Rightarrow E_0 \cdot \left(r^2_{Aphel} - r^2_{Perihel} \right) = -G \cdot m \cdot M \cdot (r_{Aphel} - r_{Perihel})$$

$$\Rightarrow E_0 = -G \cdot m \cdot M \cdot \frac{r_{Aphel} - r_{Perihel}}{{r_{Aphel}}^2 - {r_{Perihel}}^2}$$

Hier wird der Ihnen bekannte Impulserhaltungssatz auf Kreisbewegungen angewandt. Man spricht vom Drehimpulserhaltungssatz.

$$\boxed{E_0 = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r_{Aphel} + r_{Perihel}} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{2a}}$$

Quelle: https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/grundwissen/bahnen-im-gravitationsfeld [Ergänzungen: D.A.]