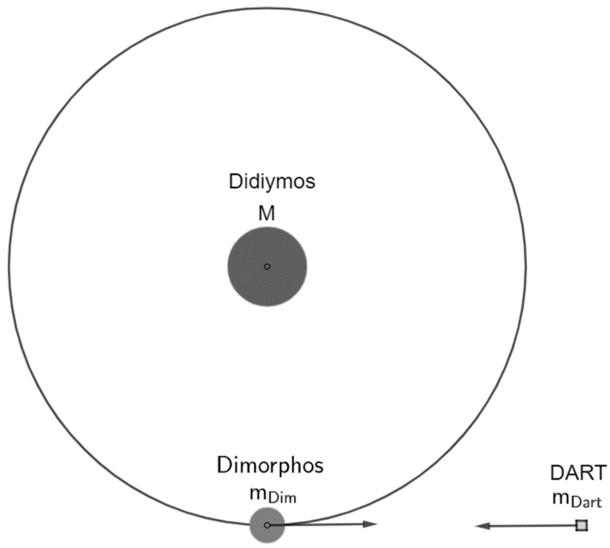
Die DART-Mission

In der Nacht von 26. auf den 27. September 2022 fand in etwa 11 Million Kilometer Entfernung von der Erde ein bemerkenswertes Experiment der NASA statt. Die Raumsonde DART prallte mit nahezu 22 000 km/h im Stil eines ungebremsten Kamikazeflugs auf den Asteroiden **Dimorphos**. Dieser kleine Asteroid umkreist als Mini-Mond den wesentlich größeren Asteroiden **Didymos**. Durch den Aufprall sollte sich die Umlaufbahn dieses kleinen Mondes geringfügig ändern – wie genau das sollte das Kollisionsexperiment zu Tage bringen.



Der Doppel-Asteroid

Daten:

- Mittlerer Radius des Zentralkörpers (Didymos): 390 m
- Mittlerer Radius des Mini-Mondes (Dimorphos): 82 m
- Geschätzte mittlere Dichte der beiden Asteroiden: $\rho = 2170 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Umlaufzeit des Mini-Mondes um Didymos: T = 42 918 Sekunden (ca. 12 Stunden)
- Masse der Raumsonde DART beim Aufprall: m_{Dart} = 570 kg
- Aufprallgeschwindigkeit: v_{Dart} = 6100 m/s

Aufgabe 1: Die Massen

Wir nehmen an, die beiden Körper haben in etwa eine Kugelgestalt.
Berechnen Sie die Massen der beiden Asteroiden.

Tipp: Verwenden Sie die Formeln für die Dichte $\rho = \frac{M}{V}$ und das Volumen einer Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

(Kontrollergebnis: $M = 5,392 \cdot 10^{11}$ kg, $m_{Dim} = 5 \cdot 10^9$ kg)

Aufgabe 2: Der Radius der Umlaufbahn:

Wir können davon ausgehen, dass der kleine Asteroiden-Mond seinen Zentralkörper auf einer nahezu kreisförmigen Bahn umläuft. Der Radius dieses Orbits ergibt sich dann aus dem dritten Keplergesetz: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$ mit der Gravitationskonstante $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

Berechnen Sie den Radius der Umlaufbahn.
(Kontrollergebnis: $r = 1188,55\,\text{m}$, also ca. 1,2 km.)

Aufgabe 3: Die Bahngeschwindigkeit:

Die Bahngeschwindigkeit des Mondes auf seinem kreisförmigen Orbit ergibt sich aus

$$v_{Dim} = \frac{2\pi \cdot r}{T}.$$

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Asteroiden-Mond unterwegs ist.

(Kontrollergebnis: $v_{Dim} = 0{,}174\,\frac{m}{s} = 17{,}4\,\frac{cm}{s}$. Das ist eine erstaunlich kleine Geschwindigkeit)

Die Kollision

Die neue Bahngeschwindigkeit:

Wir nehmen zunächst vereinfachend an, dass der Zusammenstoß der Raumsonde mit dem Mini-Mond Dimorphos ein **zentraler inelastischer Stoßprozess** ist. Das bedeutet, dass nach der Kollision beide Körper aneinanderhaften, sich die Geschwindigkeit des Mondes aber verringert hat. Diese neue Geschwindigkeit lässt sich mithilfe des Impulserhaltungssatzes berechnen:

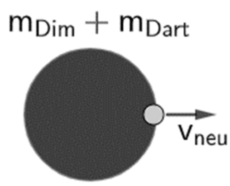
Vor dem Zusammenstoß:

Impulse:

$p_1 = m_{Dim} \cdot v_{Dim}$

$p_2 = -m_{Dart} \cdot v_{Dart}$

Nach dem Zusammenstoß:



resultierender Impuls:

$p_{res} = (m_{Dim} + m_{Dart}) \cdot v_{neu}$

Aufgabe 4:

a) Aufgrund der Impulserhaltung gilt: $p_{res} = p_1 + p_2$.

Leiten Sie mithilfe dieses Ansatzes her: Die Geschwindigkeit des Asteroidenmondes Dimorphos ergibt sich aus:

$$v_{neu} = \frac{m_{Dim} \cdot v_{Dim} - m_{Dart} \cdot v_{Dart}}{m_{Dim} + m_{Dart}}$$

Die Aufprallgeschwindigkeit der Raumsonde Dart betrug etwa 6100 m/s.

Berechnen Sie die neue Umlaufgeschwindigkeit und geben Sie die Geschwindigkeitsänderung Δv an, die sich aufgrund des inelastischen Stoßes ergibt.

(Kontrollergebnis: $\Delta v = 0{,}174\,\frac{m}{s} - 0{,}1733\,\frac{m}{s} = 0{,}0007\,\frac{m}{s} = 0{,}7\,\frac{mm}{s}$.)

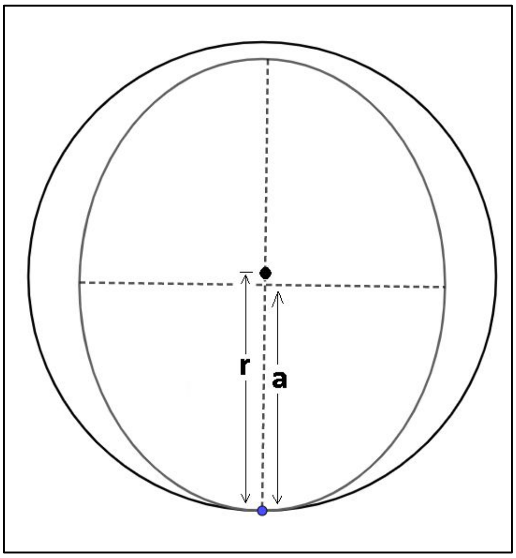
Der β-Parameter

Die Stoßwirkung eines Projektils auf einen Asteroiden wird in der Fachliteratur oft mit dem sogenannten β-Parameter beschrieben. Das ist der Quotient aus der Impulsänderung des Asteroiden und dem Impuls des Geschosses: $\beta = \frac{m_{Dim} \cdot \Delta v}{m_{Dart} \cdot v_{Dart}}$. Bei einer inelastischen Kollision ohne Auswurf hat β stets den Wert eins. Ein zusätzlicher Rückstoß durch ausgeworfenes Kratermaterial erzeugt einen Wert, der größer als eins ist.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie mithilfe der bisher ermittelten Werte den β-Parameter der Kollision.

Die Verkleinerung der Umlaufbahn

Aufgrund der Verringerung der Geschwindigkeit ist die Kreisbahn nun zu einer Ellipsenbahn geworden. In der Abbildung ist die Ellipsenbahn übertrieben dargestellt – in Wirklichkeit ist die Exzentrizität extrem klein.



Um den neuen Radius der Bahn, bzw. die große Halbachse **a** der Ellipse zu berechnen, bedienen wir uns einer Energiebetrachtung:

Die kinetische Energie des Mondes nach der Kollision im Abstand r_K (Kollisionspunkt) beträgt $E_{kin} = \frac{1}{2} m_{Dim} \cdot v_{neu}^2$. Seine potentielle Energie an dieser Stelle ist $E_{pot} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{r_k}$.

Die Gesamtenergie einer Masse auf einer elliptischen Umlaufbahn um einen Zentralkörper berechnet sich aus $E_{ges} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{2 \cdot a}$, wobei a die große Halbachse der Ellipse ist.

Damit ergibt sich der Ansatz:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges}$$

$$\frac{1}{2} m_{Dim} \cdot v_{neu}^2 - \frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{r_K} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{2 \cdot a}$$

Aufgabe 6:

Stellen Sie die obere Gleichung nach **a** um und berechnen Sie die große Halbachse **a** der Ellipsenbahn. (Kontrollergebnis: $a = 1179{,}12\,m$)

Die neue Umlaufzeit:

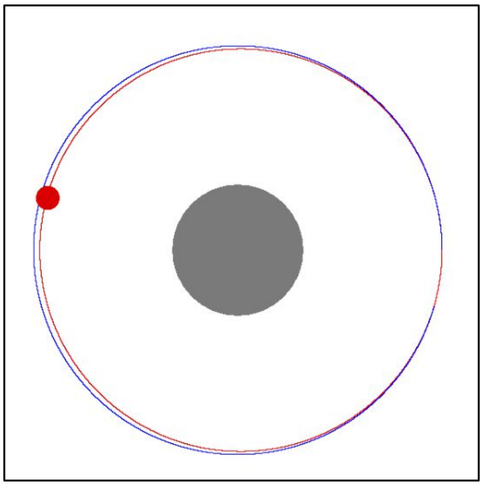
Aufgabe 7:

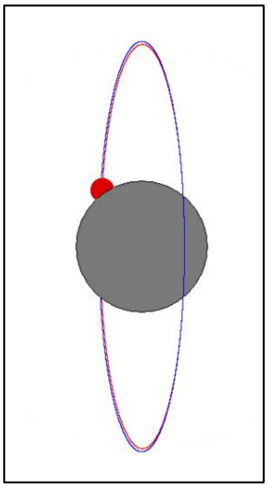
Berechnen Sie nun mithilfe des dritten Keplergesetz $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$ die neue Umlaufzeit des Asteroiden-Mondes und geben Sie die Änderung der Umlaufdauer ΔT in Minuten und Sekunden an.
(Kontrollergebnis: $\Delta T = 42918\,s - 42408\,s = 510\,s$. Das sind 8 Minuten und 30 Sekunden.)

Der Rückstoß durch das Auswurfmaterial

Bei den bisherigen Rechnungen sind Sie davon ausgegangen, dass die Kollision der Raumsonde mit dem Asteroiden-Mond unelastisch verläuft. Sie müssen aber davon ausgehen, dass bei dem Crash aufgrund der Kraterbildung Material des Mondes mit erheblicher Geschwindigkeit herausgeschleudert wird. Dadurch entsteht ein zusätzlicher **bremsender Impuls**, sodass die Änderungen der Bahnparameter deutlich größer als bisher berechnet ausfallen dürften.

Bisher (Stand: Anfang November 2022) konnte allein die neue Umlaufgeschwindigkeit recht genau gemessen werde. Dies gelang mithilfe der Helligkeitskurve des Doppel-Asteroiden. Aufgrund der starken Neigung der Bahnebene bzgl. des Beobachters (Erde) wird der Mond regelmäßig durch Didymos, dem Zentralkörper verdeckt. Dabei wird die Gesamthelligkeit des Systems ein klein wenig reduziert – die Helligkeitskurve bekommt eine Delle. Somit lässt sich die Umlaufdauer recht präzise ermitteln. Die maßstabsgerechten Abbildungen zeigen die Bahnebene einmal in Draufsicht und einmal so, wie man sie von der Erde aus sieht. Zudem sind die Bahnkurven vor und nach der Kollision dargestellt.





Die Messungen ergaben, dass die Umlaufdauer aufgrund der Kollision **um 32 Minuten verkürzt** wurde. Verglichen mit den achteinhalb Minuten, die sich aus einem rein inelastischen Stoß ohne Auswurfmaterial ergibt, zeigt das Messergebnis, dass der Rückstoßimpuls aufgrund der Kraterbildung und des Auswurfmaterials offenbar erheblichen Einfluss auf die Bahnbewegung hatte.

Aufgabe 8:
Die neue Umlaufdauer beträgt also $T_{neu} = 42918\,s - 32 \cdot 60\,s = 40998\,s$. Berechnen Sie mithilfe der dritten Keplergesetzes $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$ die große Halbachse der Ellipsenbahn, die sich nach der Kollision ergab. (Kontrollergebnis: a = 1152,84 m)

Anmerkung:
Die numerische Exzentrizität der Ellipse ist $e = \frac{r-a}{a} = \frac{1188{,}55 - 1152{,}84}{1152{,}84} = 0{,}031$.

Aufgabe 9:
In Aufgabe 6 hatten Sie mithilfe des Ansatzes

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges}$$

$$\frac{1}{2} m_{Dim} \cdot v_{neu}^2 - \frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{r} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{2 \cdot a}$$

aus der neu berechneten Geschwindigkeit (inelastischer Stoß) die große Halbachse **a** der Ellipsenbahn berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt mithilfe des oberen Ansatzes und der bekannten großen Halbachse (a = 1152,84 m) die neue Geschwindigkeit im Kollisionspunkt berechnen. Stellen Sie dazu die obere Gleichung nach v_{neu} um und berechnen Sie diese Geschwindigkeit.

(Kontrollergebnis: $v_{neu} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} = 0{,}171288 \frac{m}{s}$)

Aufgabe 10:
Die Geschwindigkeit auf der Kreisbahn vor der Kollision betrug 0,174 m/s. Nach der Kollision, wie oben berechnet: 0,171288 m/s (im Kollisionspunkt). Die Geschwindigkeitsänderung ergibt sich damit zu: $\Delta v = 2{,}712 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$.

Berechnen Sie damit den wirklichen β-Parameter $\beta = \frac{m_{Dim} \cdot \Delta v}{m_{Dart} \cdot v_{Dart}}$.

(Kontrollergebnis: β = 3,9)

Schlussbemerkung:

Der β-Parameter, wie er sich aus der gemessenen Umlaufdauer des Mondes nach dem Kollisionsereignis ergibt, zeigt, dass die Wirkung des Rückstoßes aufgrund des ausgeworfenen Kratermaterials eine erhebliche Erhöhung des Impulsübertrags bewirkt hat. Im Hinblick auf die Abwehr von vermeintlich gefährlichen Asteroiden ist dies ein bedeutsames Resultat.

November 2022

Matthias Borchardt
http://mabo-physik.de/

Tannenbusch-Gymnasium Bonn
borchardt@tannenbusch-gymnasium.de

Quellen:

- Die Daten auf Seite 1 wurden entnommen aus:

  Andrew S. Rivkin et al. *„The Double Asteroid Redirection Test (DART): Planetary Defense Investigations and Requirements“,* The Planetary Science Journal, 2021 October

  https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/ac063e

- Abbildungen vom Verfasser

LÖSUNGEN

Aufgabe 1:

Formel für die Masse einer Kugel mit konstanter Dichte: $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 2170 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (390)^3 \text{ kg} = 5{,}3919 \cdot 10^{11} \text{ kg} \approx 5{,}392 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

$$m_{Dim} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 2170 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 82^3 \text{ kg } 5{,}01 \cdot 10^9 \text{ kg} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Aufgabe 2:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow r = \left(\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \left(\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}392 \cdot 10^{11} \cdot (42918)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{m} = 1188{,}55 \text{ m}$$

Aufgabe 3:

$$v_{Dim} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1188{,}55}{42918} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}174 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 4:

$$v_{neu} = \frac{m_{Dim} \cdot v_{Dim} - m_{Dart} \cdot v_{Dart}}{m_{Dim} + m_{Dart}} = \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 0{,}174 - 570 \cdot 6100}{5 \cdot 10^9 + 570} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}1733 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta v = 0{,}174 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}1733 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}0007 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}7 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Aufgabe 5:

$$\beta = \frac{m_{Dim} \cdot \Delta v}{m_{Dart} \cdot v_{Dart}} = \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-3}}{570 \cdot 6100} = 1.$$

Das Ergebnis war zu erwarten, da es sich um einen rein inelastischen Stoß handelt. Die Rechnung soll aber nochmal deutlich machen, dass dieser Parameter ein passendes Maß für die Beurteilung von Stoßprozessen ist.

Aufgabe 6:

$$\frac{1}{2} m_{Dim} \cdot v_{neu}^2 - \frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{r_K} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{2 \cdot a} \quad |\cdot 2 \quad |: m_{Dim}$$

$$\Leftrightarrow v_{neu}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_K} = -\frac{G \cdot M}{a} \Leftrightarrow \frac{G \cdot M}{a} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_K} - v_{neu}^2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{G \cdot M}{\frac{2G \cdot M}{r} - v_{neu}^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}392 \cdot 10^{11}}{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}392 \cdot 10^{11}}{1188{,}55} - (0{,}1733)^2} \text{m} = 1179{,}12 \text{ m}$$

Aufgabe 7:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot a^3}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}392 \cdot 10^{11}} \cdot (1179{,}12)^3} \text{ s} = 42408\,\text{s}$$

$\Delta T = 42\,918\,\text{s} - 42\,408\,\text{s} = 510\,\text{s}$. Das sind 8 Minuten und 30 Sekunden.

Aufgabe 8:

$$r = \left(\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}392 \cdot 10^{11} \cdot (40998)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{m} = 1152{,}84\,\text{m}$$

Aufgabe 9

$$\frac{1}{2} m_{Dim} \cdot v_{neu}^2 - \frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{r} = -\frac{G \cdot m_{Dim} \cdot M}{2 \cdot a} \Leftrightarrow v_{neu}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_K} = -\frac{G \cdot M}{a}$$

$$\Leftrightarrow v_{neu}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_K} - \frac{G \cdot M}{a} = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_K} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_{neu} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_K} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{6{,}674 \cdot 5{,}392 \cdot \left(\frac{2}{1188{,}55} - \frac{1}{1152{,}84}\right)} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 0{,}171288 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeitsänderung beträgt daher: $\Delta v = 0{,}174 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}171288 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}712 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Aufgabe 10:

$$\beta = \frac{m_{Dim} \cdot \Delta v}{m_{Dart} \cdot v_{Dart}} = \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 2{,}712 \cdot 10^{-3}}{570 \cdot 6100} = 3{,}9$$