wissenschaft in die schulen!

Die Himmelsmechaniker

1. Orreries sind faszinierende Apparaturen, ...

Kunstvoll gestaltete mechanische Modelle des Sonnensystems erwecken auf Grund ihres ästhetisch besonders attraktiven Erscheinungsbildes fast zwangsläufig bei jedermann spontanes Interesse; die Bewegungen von Zahnrädern, Stangen und Kugeln, mit deren Hilfe die geheimnisvollen Abläufe des Kosmos nachgeahmt werden, wirken auf den Betrachter besonders geheimnisvoll, dies kann eine starke Motivation auslösen, sich mit den Funktionen des Apparats und den durch sie ermöglichten Veranschaulichungen der Bewegungsvorgänge der Planeten näher zu befassen. Die Möglichkeit, mit Hilfe mechanischer Apparaturen astronomische Vorgänge veranschaulichen zu können und damit nicht nur vorwärts in die Zukunft, sondern auch rückwärts in die Vergangenheit blicken zu können, spricht in besonderer Weise eine grundlegende philosophisch-religiöse Erfahrung an. Bei der Beobachtung der Naturerscheinungen erfährt der Mensch zwei als grundlegend verschieden empfundene Aspekte der Zeit: in allen Wachstumsprozessen einerseits ein lineares Voranschreiten (von der Geburt zum Tod, von der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft, vom Big Bang in die Unendlichkeit), in zyklisch ablaufenden Prozessen andererseits die regelmäßige Wiederkehr gleichartiger Situationen. Im engeren Sinn ist die Möglichkeit der genauen Vorhersage des Eintretens zukünftiger wohl definierter Ereignisse das entscheidende Kriterium für eine als Wissenschaft im modernen Sinn anerkannte Beschäftigung mit Naturphänomenen. Die Vorhersage einer totalen Sonnenfinsternis durch Thales kann daher zu Recht als der Beginn der Wissenschaft „Astronomie“ angesehen werden. Gerade in der Möglichkeit, zukünftige astronomische Ereignisse vorhersagen zu können, liegt die besondere Funktion und der besondere Reiz eines Kleinplanetariums.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Astronomie	Planeten, Kleinkörper	Planetenbewegung, Finsternisse, Mondphasen
Fächer-verknüpfung	Astro-Ma, Astro-Werken, Astro-Physik, Astro-Geo, Astro-Ge	Kettenbrüche, Rechnen mit kleinen und großen Zahlen, Runden, Selbstbau von Modellen, Arbeit mit Modellen (Gültigkeitsgrenzen), Jahreszeiten, Zeitmaße, Weltbilder, Datensicherung in der Vergangenheit

2. .... sie sind im Unterricht aber mit Vorsicht zu betrachten!

Die wichtigsten Phänomene, die mit Hilfe eines Kleinplanetariums veranschaulicht werden können, sind spezielle Konstellationen, die sich mit unterschiedlich langen Perioden regelmäßig wiederholen:

- Oppositionsstellungen der Planeten, bei denen Sonne, Erde und Planet (fast) in einer Linie angeordnet sind
- Konjunktionen von Planeten mit hellen Fixsternen und /oder von Planeten untereinander
- Mond- und Sonnenfinsternisse

Allerdings unterliegen ausnahmslos alle zur Veranschaulichung der Planetenbewegungen konstruierten Apparaturen unvermeidlich einer Reihe besonderer Probleme, die sich aus den speziell für die Astronomie charakteristischen Sachverhalten ergeben.

2.1 Das Problem der Maßstäbe (Aufgabe 1)

Das aus didaktischer Sicht schwierigste Problem bei der Beschäftigung mit Kleinplanetarien tritt in jedem Modell aus rein technisch bedingten Gründen unvermeidbar gleich in mehrfacher Weise auf:

2.1.1 die Durchmesser: ein einziger gemeinsamer Maßstab für die Größen der Sonne und der Planeten ist nicht realisierbar;
2.1.2 die Abstände: auch ein einheitlicher Maßstab für die Entfernungen der Planeten von der Sonne bzw. des Abstandes des Monds vom Erdmittelpunkt ist nicht konstruierbar;
2.1.3 zusätzlich kompliziert wird die Situation durch die unvermeidbare gleichzeitige Vermischung unterschiedlicher Abbildungsmaßstäbe in ein und demselben Apparatur.

Ein zusätzlicher Sachverhalt, der über die Probleme bei der Modellierung des Sonnensystems hinausgeht, sollte unbedingt mitbedacht werden,

2.1.4 die relativen Abstände der Fixsterne: selbst der Abstand der Sonne zu dem nächst gelegenen Fixstern Proxima Centauri ist mit keinem wie auch immer gewähltem Maßstab anschaulich darstellbar: sind etwa Kirschen über die Hauptstädte Europas verteilt „anschaulich“ genug, um sich die räumlichen Distanzen zwischen den Sternen unseres galaktischen Systems zu vergegenwärtigen? Die Dimensionen der Galaxis im Verhältnis zu den Größen im Planetensystem sind nur noch abstrakt erfassbar.

2.2 Das Problem der Mondbahn

Zwei Bemerkungen zur Realisation der Mondbahn sind notwendig: es ist technisch aufwendig, aber (wie im Beitrag zu lesen und in der Abbildung zu sehen) möglich, die Neigung von 5^0 der Mondbahnebene gegen die Erdbahnebene zu berücksichtigen. Allerdings verändert sich die räumliche Lage dieser Mondbahnebene mit der Zeit; dies ist die Ursache für den sog. Saroszyklus der Mond- bzw. Sonnenfinsternisse mit einer Periode von 6585,3 Tagen [6], der von dem im Beitrag erwähnten Meton-Zyklus deutlich unterschieden werden muss. Es muss technisch recht aufwendig sein, diese Variation in einem mechanischen Modell konstruktiv zu berücksichtigen,. Die zweite Bemerkung betrifft die Tatsache, dass die wahre Bahnform des Mondes relativ zur Sonne leider nicht unmittelbar anschaulich ist: das reale Verhältnis der Entfernungen $r_{Sonne\text{-}Erde} : r_{Erde\text{-}Mond}$ von ca. 400 : 1 ist dafür bereits zu groß; auch die gleichzeitig notwendige Berücksichtigung der Winkel zwischen zwei zeitlich aufeinander folgenden Vollmond- oder Neumondpositionen hat in der Alltagserfahrung keine übertragbare Entsprechung; eine lesenswerte Darstellung der Details findet man bei Vornholz [4]. Aus der Abb. des Beitrags entnimmt man für $r_{Sonne\text{-}Erde} : r_{Erde\text{-}Mond}$ den Wert ca. 4 : 1 ! Das hat schwerwiegende geometrische Konsequenzen. Für die Mondbahn ergibt sich eine schleifenförmige Epizykel-Deferenten-Bewegung, die den Bahnformen der Planeten im ptolemäischen System ähnelt. Es muss im Unterricht unbedingt vermieden werden, dass sich dieses falsche Bild in den Köpfen der SchülerInnen festsetzt. Auch heute finden sich immer noch missverständliche Abbildungen hinsichtlich der „wahren“ Mondbahn; nicht nur in der Alltagssprache, auch in Schulbüchern ist noch zu oft davon die Rede, dass der Mond um die Erde kreist, selbst wenn richtigerweise von den Bewegungen beider Himmelskörper um den gemeinsamen Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems und dessen gleichzeitige Bewegung auf einer (elliptischen) Bahn um die Sonne gesprochen wird. Fazit: eine in allen entscheidenden Einzelheiten korrekte Konstruktion die Mondbahn lässt sich nicht verwirklichen.

2.3 Einfache Modelle können nur kreisförmige Planetenbahnen simulieren

Oft liest man, die Unterschiede zwischen den wahren elliptischen und den idealisierten kreisförmigen Bahnen der Planeten seien vernachlässigbar. Auch hierbei gilt es, kritisch zu sein: die realen Differenzen der Zahlenwerte der Ellipsenhalbachsen im Vergleich zu Kreisbahnradien sind zwar bei fast allen Planeten relativ klein, aber schon mit Hilfe eines beliebigen Jahreskalenders lässt sich leicht zeigen, dass die Erde „offensichtlich“ keine Kreisbahn um die Sonne beschreibt. Auch speziell für den Mars sind die Folgen der Abweichungen von einer idealen Kreisbahn für jeden halbwegs aufmerksamen Beobachter leicht und deutlich zu beobachten. Die Unterschiede zwischen elliptischen und kreisförmigen Bahnen können in einem Apparat nicht realisiert werden.

2.4 Gibt es „Planeten-Finsternisse“?

Erfahrungsgemäß führt die zuvor diskutierte technisch bedingte Problematik in Bezug auf eine andere zentrale Aufgabe von Kleinplanetarien auf ein geradezu exemplarisches Beispiel für einen Denkvorgang, der in der Fachdidaktik als „Misskonzept“ bezeichnet wird: hat man das Prinzip der Entstehung einer Sonnenfinsternis (z.B. mit Hilfe eines Orreries!) richtig verstanden, so kann man auf der Grundlage dieser richtigen Kenntnis bei Nichtbeachtung der (unvermeidbar falschen) Größendimensionen des gleichen Kleinplanetariums fast zwangsläufig zu der falschen Schlussfolgerung gelangen, dass z.B. die Venus bei einer Konjunktionsstellung für die Erde eine Sonnenfinsternis bewirkt!

3. Kleinplanetarien (Orreries) sind dennoch als Unterrichtsgegenstände sehr geeignet!

Trotz der o. g. Probleme sind Kleinplanetarien einzigartige Instrumente, um fundamentale kosmische Zusammenhänge zu demonstrieren, deren Kenntnis für ein zeitgemäßes allgemeines Weltverständnis unverzichtbar sind. Und gerade wegen der speziellen technisch bedingten Problematik sind Kleinplanetarien besonders geeignet, die zwei wesentlichen Aspekte eines Modells im Vergleich zur abgebildeten Realität zu thematisieren: was genau soll / kann durch ein Modell korrekt veranschaulicht werden und wo liegen die Grenzen des Modells, die nicht überschritten werden dürfen, ohne die Realität zu verfälschen.
Dieser spezielle Aspekt ist der eine wichtige Grund, warum Kleinplanetarien Unterrichtsgegenstand sein sollten. Die zweite didaktische Begründung beruht auf der Tatsache, dass mit diesem Thema in besonderer Weise nicht nur allgemein wichtige mathematische Methoden (vgl. die Aufgaben 1 – 3), sondern auch sehr unterschiedliche Aspekte verschiedener Schulfächer angesprochen werden können, was einen wichtigen Beitrag zur Motivation von Schülerinnen und Schülern leisten kann.

3.1 Fächerverbindende Aspekte

3.1.1 Technik: Selbstbau einfacher Modelle [1], [3], [7]

Der Selbstbau einfacher Grundmodelle ist leicht realisierbar. Um die Bewegung zweier Planeten um die Sonne zu simulieren, sind nur vier Zahnräder erforderlich, von denen je zwei gleichartig sind. Das Thema ist ideal für Projektwochen geeignet, um praktisch ausgerichtete, handlungsorientierte Lernziele umzusetzen.

3.1.2 Astronomie / Erdkunde

3.1.2.1 Tellurium
3.1.2.2 Lunarium
3.1.2.3 Jahreszeiten
3.1.2.4 Mars Orrery: sehr aktuell wegen der z. Z. aktiven Sonden, die auf der Marsoberfläche arbeiten bzw. den Mars umkreisen
3.1.2.5 Jovilabium: (Roemers Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit; Vergleich mit Galileis Modell der vier großen Jupitermonde; Geschichte der Entdeckungsfahrten und das Problem der Ortsbestimmung
3.1.2.6 Saturnilabium (?): z.Z. sehr aktuell wegen der CASSINI-Mission

3.1.3 Physik

3.1.3.1 Veranschaulichung der Modelle des ptolemäischen bzw. kopernikanischen Systems
3.1.3.2 Wechselbeziehung Realität – Modell
3.1.3.3 Mehrfache Wechsel der Perspektive / des Standortes des „Beobachters": auf der Erdoberfläche – im Erdmittelpunkt – im Sonnenmittelpunkt – außerhalb des Planetensystems.

3.1.4 Mathematik

3.1.4.1 Kontextorientierte Aufgabenstellungen: Gleichungssysteme aufstellen und lösen
3.1.4.2 Bruchrechnen allgemein; Runden [5]
3.1.4.3 Bruchrechnen mit großen Zahlen bzw. Methode der Kettenbrüche (Huygens) [2]

3.1.5 Geschichte

Die Konfrontation mit einem mechanischen Modell der Planetenbewegungen führt zwangsläufig zu weiterführenden grundlegenden Fragen: ein halbwegs zuverlässig funktionierender mechanischer Apparat kann erst konstruiert werden, wenn die Zahlenwerte der Zeitspannen, die er veranschaulichen soll, sehr präzise bekannt sind. Aber wie konnten die Astronomen der Antike und des Mittelalters ohne Hilfe des Computers die (absoluten) Umlaufszeiten des Mondes (vgl. Aufgabe 2) und der Planeten (vgl. Aufgabe 3) eigentlich so exakt bestimmen? Um aus Beobachtungsdaten der Bewegungen der mit bloßem Auge sichtbaren Himmelskörper Perioden von mehreren Jahrzehnten herausfinden zu können, muss es effektive Methode der Sicherung von Beobachtungsdaten gegeben haben: hier gewinnt die sonst eher als geisteswissenschaftliches Problem angesehene Frage nach der Qualität der historisch überlieferten Quellen eine zusätzliche Bedeutung.

Die Aufgaben streben folgende Lernziele an: die SchülerInnen sollen

A. ein vertieftes Verständnis für die Problematik der Modelle des Sonnensystems gewinnen (Aufgabe 1);
B. die Methode des Rundens zur Ermittlung der Periodendauer des Metonischen Zyklus der Mondbewegung anwenden (Aufgabe 2) ;
C. Huygens´ Methode der Kettenbruchentwicklung zur Bestimmung optimaler Zahnräder kennenlernen und auf andere Planeten übertragen können (Aufgabe 3);
D. weitere Zyklen kennen lernen, die bei der Bewegung der Körper des Planetensystems auftreten (z.B. Saroszyklus) und das Auftreten solcher Periodizitäten anschaulich begründen können;
E. am Beispiel einer konkreten Apparatur ein grundlegendes wissenschaftstheoretisches Verständnis für die Bedeutung eines Modells in Bezug auf die damit erfasste Realität erwerben.

Aufgabe 1: Das Problem der Maßstäbe

Daten (alle Streckenangaben in km)

Größe	**Realität**	**Modell**	**Verkleinerungsfaktor**
Sonnendurchmesser	1.390.000	2,5 cm = $2{,}5 * 10^{-5}$	$f_{Sonne} = 1{,}798 * 10^{-11}$
Erddurchmesser	12.734	1,0 cm = $1{,}0 * 10^{-5}$	$f_{Erde} = 7{,}85 * 10^{-10}$
Monddurchmesser	3.480	3 mm = $3{,}0 * 10^{-6}$	$\approx 10^{-6}$
Abstand Sonne-Erde	149.600.000	8 cm = $8{,}0 * 10^{-5}$	$\approx 5*10^{-13}$
Abstand Erde-Mond	384.400	2,0 cm = $2{,}0 * 10^{-5}$	$\approx 5*10^{-11}$
Entfernung Sonne-Proxima Centauri	41.140.000.000.000		

a) Bestimme für das abgebildete Orrery die Durchmesser der Erd- und der Sonnenkugel!
b) Bestimme den Verkleinerungsfaktor f_S für die Sonnenkugel und berechne, wie klein die Erdkugel des Modells bei diesem Maßstab sein müsste!
c) Bestimme umgekehrt den Verkleinerungsfaktor f_E für die Erdkugel und berechne, wie groß die Sonnenkugel in diesem Maßstab sein müsste!
d) Wie groß müsste der Abstand $r_{S,E}$ der Kugeln im Modell sein, wenn die Entfernung Sonne-Erde (1 Astronomische Einheit = 1 AE) um den Faktor f_S (um den Faktor f_E) verkleinert würde?
e) Vergleiche die Größen der Erd- und Mondkugel und ihres Abstandes voneinander im Modell mit den wahren Größen!
f) Vergleiche die Größe der Erd-, Venus- und Merkurkugeln des Modell mit den wahren Größen!
g) Vergleiche die Abstände der Erd-, Venus- und Merkurkugeln des Modell von der Sonnenkugel mit den wahren Größenverhältnissen!
h) Wie weit wäre der nächstgelegene Fixstern Proxima Centauri im Modell entfernt, wenn der wahre Abstand im Verhältnis f_S verkleinert würde?

Lösungen:

a) siehe Tabelle

b) $f_{Sonne} = 1{,}798 * 10^{-11}$

$d_{Erde} = f_S$ * Erddurchmesser $= 2{,}29 * 10^{-7}$ km = 0,229 mm

c) $f_{Erde} = 7{,}85 * 10^{-10}$

$d_{Sonne} = f_E$ * Sonnendurchmesser $= 1{,}09 * 10^{-4}$ km = 10,9 cm

d) $r_{S,E} = f_S * 149.600.000 = 2{,}69 * 10^{-3}$ km = 2,69 m

$r_{S,E} = f_E * 149.600.000 = 1{,}174 * 10^{-1}$ km = 117,4 m

Aufgabe 2: Der Metonische Zyklus

Die Problemstellung, die grundsätzlich auch jedem anderen zyklischen Vorgang zu Grunde liegt, ist in diesem speziellen Fall besonders einfach zu verstehen: ist es möglich, dass sich zum gleichen Datum verschiedener Jahre die Mondphase genau wiederholt? Gibt es (bezogen auf einen Beobachter auf der Erde) während einer bestimmten ganzzahligen Anzahl von Jahren eine ebenfalls ganzzahlige Anzahl von vollen Mondumläufen?

Lösung:

Der Zeitraum zwischen (von der Erde aus beobachteten) gleichen Mondphasen beträgt 29,53 Tage; ein Umlauf der Erde (Sonne) um die Sonne (Erde) erfolgt in 365,25 Tagen; sei n die Anzahl von Jahren und k die Anzahl der vollen Mondumläufe, so führt dies auf die Beziehung

(2) n x 365,25 Tage = k x 29,53 Tage

12 Umläufe des Mondes erfolgen daher in nur 354,36 Tagen, d.h. pro Jahr ist der Mond 10,89 Tage vorausgeeilt. In n Jahren ergeben sich so n x 10,89 Tage, die genau m zusätzlichen Umläufen des Mondes relativ zur Erde entsprechen sollen:

(3) n x 365,25 Tage = (n x 12 + m) x 29,53 Tage
(4) n x 10,89 Tage = m x 29,53 Tage

Das Verhältnis n : m = 2953 : 1089 = 268 : 100 = 134 : 50 ergibt sich leicht; der Lösungstrick liegt nun in dem glücklichen Umstand begründet, daß man durch geschicktes, behutsames Runden auf das Verhältnis

(5) 134 : 50 ≈ 133: 49 = 19*7 : 7*7 = 19 : 7

stößt! In 19 Jahren ergeben sich somit 206,91 Tage, die fast genau 7 zusätzlichen Umläufen des Mondes relativ zur Erde entsprechen: 7x 29,53 Tage = 206,71 Tage. Die Differenz von 0,2

Tagen ≈ 5 Stunden ist im Vergleich zu 19 Jahren hinreichend klein, man kann also in der Tat von einem (fast) perfekten Zyklus sprechen.

19 x 365,25 Tage = (19 x 12 + 7) x 29,53 Tage

Der Metonische Zyklus mit eine Periode von 6939,6 Tagen darf aber nicht mit dem sog. Saros-Zyklus der Mond- bzw. Sonnenfinsternisse verwechselt werden!

Aufgabe 3: Berechnung von Zahnrädern zur Simulation von Planetenbewegungen [2]

Am Beispiel der Erde und des Saturn soll die von HUYGENS 1680 durchgeführte Methode der Kettenbruchentwicklung erläutert werden, mit dem er Zahnräder für ein Modell des Sonnensystems berechnete.
In 365 Tagen durchläuft die Erde von der Sonne aus gesehen den Winkel 359°45´40´´31´´´, Saturn legt in der gleichen Zeit nur 12°13´34´´18´´´ zurück. Wandelt man diese Sexagesimalzahlen in Brüche um und erweitert mit dem Faktor 60^3 = 216.000, so ergibt sich ein Verhältnis der Umlaufszeiten $T_{sat} : T_{erd}$ = 77.708.431 : 2.640.858. Zahnräder mit mehreren Millionen Zähnen sind natürlich nicht konstruierbar, es muss eine möglichst gute Approximation gefunden werden. Die im Falle des Meton-Zyklus erfolgreiche Methode des Rundens

77.708.431 : 2.640.858 ≈ 77.700.000 : 2.600.000 = 777 : 26

versagt hier, sie liefert viel zu ungenaue Ergebnisse. Huygens´ Methode der Kettenbruchentwicklung liefert

77.708.431 : 2.640.858 = 29 + 1.123.549/2.640.858
= 29 ´+ 1/(2.640.858/1.123.549)
= 29 + 1/(2 + 393.760/1.123.549)
= 29 + 1/(2 + (1/(1.123.549/393.760))
= 29 + 1/(2 + (1/(2 + 336.029/393.760))
= 29 + 1/(2 + (1/(2 + 1/(393.760/336.029)))
= 29 + 1/(2 + (1/(2 + 1/(1 + ...)))
≈ 29 + 3/7 = 206/7

Das Erdzahnrad benötigt also nur 7 (!), Zähne, das Saturnrad immerhin 206, was technisch als realisierbar erscheint.
Natürlich muss geprüft werden, wie gut diese Näherung die tatsächlichen Bewegungen der beiden Planeten wiedergibt: sei die Anzahl x der Erdumläufe, nach denen das Erdzahnrad einen Fehler von einem Zahn aufweist, so führt dies auf folgende Gleichung

(x*206) : (x*7 + 1) = 77.708.431 : 2.640.858

mit der Lösung x ≈ 1346.

Zusatzaufgabe: Beschaffe Dir die Umlaufszeiten anderer Planeten des Sonnensystems und wende die Huygenssche Methode auf an, um die für diese Objekte geeigneten Zahnräder zu berechnen!

Quellen

[1] www.metallus.de

[2] Stowasser, R.J.K.: „Zahlen zum Messen“, Mathematiklehrer 1-1980, S. 39 ff., Hirschgrabenverlag, Frankfurt/M.

[3] Seymour, P.: „Astronomie ganz einfach , Bauen und Beobachten – Von der Sonnenuhr zum Spiegelfernrohr“, Kosmos Franckh, Stuttgart 1985

[4] Vornholz, D.: Astronomie auf Klassenfahrten, Westermann, Braunschweig 1992

[5] Prenzing, G.: „Experimente mit Getriebemodellen zur Erarbeitung der Multiplikation von Brüchen“, RAAbits Impulse und Materialien für die kreative Unterrichtsgestaltung, Mathematik Sekundarstufe I/II, Berlin; Bonn; Budapest; Heidelberg; Stuttgart 1994

[6] Keller, H.-U.: KOSMOS Himmelsjahr 2006, Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co. KG, Stuttgart, S. 165 ff.

[7] Astromedia