Johannes Keplers religiöse Heliozentrik

Vor 400 Jahren erschien Johannes Keplers epochales Werk »Astronomia Nova«. Darin formuliert er zwei der drei berühmten nach ihm benannten Gesetze – sie beschreiben die Form der Planetenbahnen und den zeitlichen Verlauf der Bahngeschwindigkeiten. Welche überlieferten Prinzipien musste Kepler über Bord werfen, welche Leitgedanken führten ihn zu diesem Ziel?

In seinem Aufsatz »Johannes Keplers religiöse Heliozentrik« in »Sterne und Weltraum« 10/2009, S. 42–52, beantwortet Ernst Kühn diese Fragen. Hier folgt zusätzliches Material, in dem die physikalischen Grundlagen mit mathematischen Hilfsmitteln vorgeführt werden.

Infokasten 1: Quantitatives zur Zerlegung der Planetenbewegung in einen Zirkularteil und einen Radialteil

Keplers Maß für die Schnelligkeit des Planeten ist die *»mora«*, die Zeitzunahme Δt je kleinem Wegelement Δs. Das entspricht dem Kehrwert der modernen Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. In Keplers traditioneller, auf Aristoteles fußender Mechanik, ist die *mora* umgekehrt proportional zur wirksamen Kraft anzusetzen. Das heißt, modern formuliert: Die Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ist direkt proportional zur wirksamen Kraft. Um Keplers Kraftvorstellungen zum Planetenlauf zu überprüfen, nehmen wir eine Analyse der Geschwindigkeit vor, ausgehend von der fertigen Kepler-Planetenbewegung.

Wir denken uns die Planeten-Ellipse aufgestellt wie in Keplers Figur, der Abbildung im Kasten auf Seite 50 und 51 im oben erwähnten Aufsatz: Aphel A oben, Perihel C unten. Wir übernehmen wieder die Bezeichnungen und die moderne Formulierung der Kepler-Gesetze I. und II.:

a = HA = große Halbachse der Ellipse und Umkreisradius

$e = \frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{HA}}$ = (numerische) Exzentrizität der Ellipse

$\sqrt{1-e^2}$ = Stauchungsfaktor zwischen Umkreis und Ellipse

φ = ANM = Positionswinkel an der Sonne N, Zählbeginn am Aphel,
Keplers ausgeglichene Anomalie, *»anomalia coaequata«*

r = NM = laufender Abstand Sonne-Planet, »Radiusvektor«

t = laufende Zeit

T = Umlaufzeit, Periode

I. Kepler-Gesetz $\quad r = a \cdot \dfrac{1-e^2}{1-e\cos\varphi}$, die elliptische Bahn,

II. Kepler-Gesetz $\dfrac{1}{2} r \cdot (r \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}) = \text{konstant} = c$, die konstante Flächengeschwindigkeit.

Nun betrachten wir rechtwinklige Hilfskoordinaten $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ für den Planeten,

$$\begin{Bmatrix} x(\varphi(t)) \\ y(\varphi(t)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{Bmatrix},$$ mit Nullpunkt in der Sonne N, x nach oben, y nach links.

Daraus die Geschwindigkeit, komponentenweise:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \cdot (-\sin\varphi) \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ r \cdot \cos\varphi \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \cdot \cos\varphi \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \cdot \sin\varphi \end{Bmatrix}$$

(mit Produkt- und Kettenregel der Analysis).

Mit Hilfe von II., $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\,c}{r^2}$, können wir die explizite Zeitabhängigkeit eliminieren.

Wir legen uns dazu auch noch zurecht:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{2\,c}{r^2} = -2\,c \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi}$$ (mit Quotientenregel der Analysis).

Zusammen (gemeinsame Faktoren vor die Klammern gezogen):

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{Bmatrix} = 2\,c \cdot \frac{1}{r} \cdot \begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix} + 2\,c \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{Bmatrix}$$ beschreibt die zum Radiusvektor Sonne – Planet rechtwinklige Richtung, d.h. die Zirkularrichtung.

$$\begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\varphi + \pi) \end{Bmatrix}$$ bezeichnet die Gegenrichtung zum Radiusvektor, d.h. die Radialrichtung Planet – Sonne.

Wir stoßen also in der Tat auf die gesuchte Zerlegung der Geschwindigkeit in einen Zirkularteil und einen Radialteil.

Betrag Zirkularteil: $\upsilon_{zirk} = \dfrac{2\,c}{r}$, Betrag Radialteil: $\upsilon_{rad} = 2\,c \cdot \dfrac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi}$.

r bzw. $\frac{1}{r}$ gemäß I. (Ellipsenbahn) in υ_{rad} einsetzen:

$$\upsilon_{rad} = 2\,c \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi} = 2\,c \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{1 - e\cos\varphi}{a \cdot (1-e^2)}}{\mathrm{d}\varphi} = 2\,c \cdot \frac{+e\sin\varphi}{a \cdot (1-e^2)}.$$

Wir können noch die konstante Flächengeschwindigkeit c für die Kepler-Ellipse berücksichtigen:

$$c = \frac{\text{Gesamtellipsenfläche}}{\text{Umlaufzeit}\,T} = \frac{a^2\pi \cdot \sqrt{1-e^2}}{T}.$$ Dies führt auf

$$\upsilon_{zirk} = \frac{2\,\pi\,a}{T} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad \upsilon_{rad} = \frac{2\,\pi\,a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot e\sin\varphi.$$

Eine Art mittlere Geschwindigkeit $\frac{2\,\pi\,a}{T}$ tritt in beiden Teilen als natürlicher Maßstabsfaktor auf. Vor allem aber sehen wir:

Fazit: Zirkularteil und Radialteil der Bahn*geschwindigkeit* zeigen miteinander genau die funktionalen Abhängigkeiten, die Kepler für seine »magnetische« Zirkular- und Radial*kraft* postuliert!

- Zirkulargeschwindigkeit/-kraft proportional zu $\frac{1}{r}$, zum Kehrwert des Abstands,
- Radialgeschwindigkeit/-kraft proportional zum Betrag der Exzentrizität e und zum Sinus der ausgeglichenen Anomalie φ.

Wenn Kepler seine Marsbahn (*orbis*) und den Zeitverlauf, »die Bewegung« (*motus*), schrittchenweise aus seinen beiden erratenen »ursächlichen«, »magnetisch« genannten Kräften – sprich Geschwindigkeiten – aufbaut, sozusagen numerisch integriert –, dann brauchen wir uns nicht zu wundern, dass zutreffende Ergebnisse herauskommen (Tabelle in Kapitel 51/53 in Keplers »Astronomia Nova« aus dem Jahr 1609). Über die – von 1 nicht sehr verschiedenen – Proportionalitätsfaktoren $\sqrt{1-e^2}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, die Kepler natürlich nicht bewusst waren, brauchen wir uns nicht zu sorgen. Die hat er im Griff durch die Anpassungsbedingungen, dass der Radiusvektor auf dem Weg vom Aphel zum Perihel um den Faktor $\frac{1-e}{1+e}$ abzunehmen hat, und die Geschwindigkeit um den Faktor $\frac{1+e}{1-e}$ zuzunehmen hat. Wir stoßen auf derartige kleine Korrekturen in Vorläufertabellen vorausgegangener Kapitel. Kepler meint, er müsse in diese Richtung ein wenig korrigierend anpassen, um kleine Rechenungenauigkeiten während der 180 Ein-Grad-Schritte zu kompensieren, – den eigentlichen Grund konnte er natürlich nicht wissen.

Alles in allem: Keplers Himmelsphysik (*physica coelestis*) ist funktionsfähig!

Aber: Nur auf ein und derselben Planetenbahn ist sie zutreffend. Für den Anschluss von Bahn zu Bahn versagt der Ansatz:

Die zu $\frac{1}{r}$ proportionale Zirkulargeschwindigkeit würde den Zusammenhang Umlaufzeit T proportional zu a^2, dem Quadrat des Bahnhalbmessers a, liefern. Richtig ist dagegen, nach dem III. Kepler-Gesetz:

T proportional zu $a^{\frac{3}{2}}$.

Mit dem späteren Mechanik-Grundansatz von Newton – *Beschleunigung* proportional zur wirkenden Kraft – wird eben diese Diskrepanz beseitigt (siehe Infokasten 2).

Was bleibt:
- Keplers neuartige *Idee*, dass sich die Bahnen und die Bewegung der Planeten aus der mathematischen Struktur von verursachenden Kräften mathematisch zwangsläufig ergeben; ohne feste Bahnen in einem (fast) materiefreien Raum, ohne antreibende und/oder steuernde Engel/Seelen/Geister.
- Und es bleibt die beiläufig in Ordnung gebrachte Planetenbewegung auf der elliptischen Bahn, gemäß dem I. und II. keplerschen Gesetz.

Infokasten 2: Ein Vorgriff auf Isaac Newton, der in der Beschleunigung – nicht mehr in der Geschwindigkeit – die bei der Bewegung wirksame Kraft sucht

Wir hatten für die Komponenten der Geschwindigkeit (siehe Infokasten 1) gefunden:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{Bmatrix} = 2\,c\cdot\frac{1}{r}\cdot\begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix} + 2\,c\cdot\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{Bmatrix}.$$

Wir differenzieren ein weiteres Mal nach der laufenden Zeit t und ersetzen wieder, wo es auftritt,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,c}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -2\,c\cdot\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Dann heben sich einige Terme gegenseitig auf, und es bleibt für die Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \end{Bmatrix} = \frac{4\,c^2}{r^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)\cdot\begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{Bmatrix}.$$

Beim Einsetzen von r bzw. $\frac{1}{r}$ in der Klammer, gemäß dem I. Gesetz, heben sich nochmals zwei komplizierte Terme auf, und es bleibt übrig

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \end{Bmatrix} = \frac{4\,c^2}{r^2} \cdot \frac{1}{a \cdot (1-e^2)} \cdot \begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{Bmatrix}.$$

Ersetzen wir auch noch die konstante Flächengeschwindigkeit c,

$c = \dfrac{\text{Gesamtellipsenfläche}}{\text{Umlaufzeit}\,T} = \dfrac{a^2\pi \cdot \sqrt{1-e^2}}{T}$, dann landen wir bei

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \end{Bmatrix} = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\varphi+\pi) \\ \sin(\varphi+\pi) \end{Bmatrix}.$$

Die Beschleunigung schaut entgegen dem Radiusvektor, also stets in Richtung vom Planet zur Sonne. Im Betrag ist sie umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands r.

Im Proportionalitätsfaktor erscheint $\frac{a^3}{T^2}$. Vom III. Kepler-Gesetz wissen wir, dass dies eine Konstante des Planetensystems ist.

Folglich ist die $\frac{1}{r^2}$-Beschleunigung universell im Planetensystem,

ohne Bruch von Bahn zu Bahn.

Das Scheitern der von Kepler ausgedachten Kräfte beim Anschluss Bahn zu Bahn hat seinen Grund in Keplers falschem, traditionellen mechanischen Grundansatz ***Geschwindigkeit*** proportional zur wirksamen Kraft, ***anstatt Beschleunigung***.

Infokasten 3: Kepler-Planetengesetze II. und I., formuliert mit der exzentrischen Anomalie μ, dem keplerschen Mittelpunktswinkel *(anomalia ex centro)*.

Zur Beschreibung der Punkte K auf dem Umkreis der Abbildung im Kasten auf Seite 50 und 51 im oben erwähnten Aufsatz – einem Vorläufer der elliptischen Planetenbahn – bietet sich ganz natürlich der Winkel μ = AHK am Kreismittelpunkt H an. Kepler behält ihn dann auch für die Beschreibung der Ellipsenpunkte M bei; man hat nur die vorzunehmende seitliche Stauchung (mit dem richtigen Faktor, siehe weiter unten) zu berücksichtigen.

Dieser – uns zunächst fremdartig anmutende – Mittelpunktswinkel, exzentrische Anomalie μ *(anomalia ex centro)* erweist sich als unerwartet praktisch, sowohl zur Beschreibung des Zeitverlaufs der Planetenbewegung entlang der Ellipse als auch für die Ellipse selbst.

Wir gehen also – mit Kepler – von einem Kreis als vorläufiger Bahn aus, von einem Kreis, dessen Mittelpunkt H ein wenig abseits vom Zentrum der Welt – abseits von der Sonne N – »exzentrisch« gelegen ist. Die Verbindungslinie Sonne-Kreismittelpunkt NH legt eine Achsenrichtung fest, die spätere »Apsidenlinie«. Der Quotient aus der Entfernung Sonne-Kreismittelpunkt NH und dem Kreisradius a ist die »(numerische) Exzentrizität« $e = \frac{\mathrm{NH}}{a}$.

Nun wird der Kreis seitlich, d.h. rechtwinklig zur »Achse«, gestaucht, mit überall dem gleichen Stauchungsfaktor. Dadurch entsteht eine Ellipse mit zwei Hauptscheiteln, den »Apsiden« A und C, und zwei Nebenscheiteln auf halber Strecke, d.h. in B und symmetrisch gegenüber.

Entscheidend ist, dass Kepler den Kreis gerade so weit staucht, dass der Abstand Sonne–Nebenscheitel NB gerade gleich dem Kreisradius a wird, $\mathrm{NB} = a$. Das hat er zunächst instinktiv so gemacht, und dann mit Beobachtungsdaten, den Marsdaten von Tycho Brahe, als zutreffend nachgewiesen. Aus dem Dreieck BNH können wir den Stauchfaktor als

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{EH}} = \frac{\sqrt{a^2 - (a\,e)^2}}{a} = \sqrt{1-e^2} \text{ entnehmen.}$$

Machen wir uns also an das II. keplersche Gesetz (in Verbindung mit dem I.):

> Die verstrichene Zeit ist proportional zur Fläche, die der Radiusvektor Sonne–Planet überstrichen hat.

Oder gleichbedeutend:

> Das Verhältnis aus der verstrichenen Zeit zu der vom Radiusvektor Sonne–Planet überstrichenen Fläche ist konstant.

$$\frac{\text{Zeit } t}{\text{Ellipsensektorfläche HAM} + \text{Dreiecksfläche NHM}} = \text{konst.} = \frac{\text{Umlaufzeit } T}{\text{Ellipsengesamtfläche}}.$$

Wir denken uns die Einzelteile als aus dem Umkreis durch Stauchung mit $\sqrt{1-e^2}$ entstanden,

$$\frac{t}{a^2\pi \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \sqrt{1-e^2} + \frac{ae \cdot a \sin\mu}{2} \cdot \sqrt{1-e^2}} = \frac{T}{a^2\pi \cdot \sqrt{1-e^2}}$$

Der Stauchungsfaktor $\sqrt{1-e^2}$ und anderes kürzen sich heraus; es bleibt

$$\frac{t}{T}\cdot 2\,\pi = \mu + e\sin\mu\,.$$

$\frac{t}{T}\cdot 2\,\pi = \tau$ ist eine Art Zeitwinkel, Keplers »mittlere Anomalie«, *anomalia media*.
$\tau - \mu = e\sin\mu$ ist die Differenz, der Ausgleich, »die Gleichung« *(aequatio)* zwischen der mittleren Anomalie τ und der exzentrischen Anomalie μ. Die Beziehung stellt den Zusammenhang zwischen Zeit und Ort bei der Kepler-Bewegung in der einfachsten Form dar und spielt eine wesentliche Rolle in Keplers späteren Rudolfinischen Planetentafeln (1627). Die Beziehung ist als »die keplersche Gleichung« in die Literatur eingegangen. Häufig fehlt der Hinweis, dass es sich dabei um nichts anderes als das II. Gesetz, angewandt auf die elliptische Planetenbahn (I.), handelt; so kann der falsche Eindruck entstehen, es handele sich um etwas Zusätzliches, neben den Kepler-Gesetzen unabhängig Bestehendes.

Nun zum I. keplerschen Gesetz, mit Formulierungshilfe durch die exzentrische Anomalie μ.

Unsere rechtwinkligen Hilfskoordinaten (s. Infokasten 1 und der erwähnten Abbildung auf Seite 51), x (nach oben) und y (nach links) schreiben sich mit der exzentrischen Anomalie wie folgt:

$$x = a\cdot(\cos\mu + e),$$
$$y = a\sin\mu\cdot\sqrt{1-e^2}\,.$$

Hieraus der Abstand Sonne–Planet, die Radiusvektorlänge, $r = \mathrm{NM}$:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2}\\
&= \sqrt{a^2\cdot(\cos\mu+e)^2 + a^2\sin^2\mu\cdot(1-e^2)}\\
&= a\cdot\sqrt{\cos^2\mu + 2\,e\cos\mu + e^2 + (1-\cos^2\mu)\cdot(1-e^2)}\\
&= a\cdot\sqrt{1+2\,e\cos\mu + e^2\cos^2\mu}
\end{aligned}$$

$r = a\cdot(1+e\cos\mu),$ $\qquad$ μ wird gezählt ab der Aphelrichtung.

Diese verblüffend einfache Beziehung an der Ellipse war vor Kepler nicht bekannt. Er hat sie in den langen Kapiteln 59 und 60 seiner »Astronomia Nova« αιτιολογητος (1609) geometrisch, mit Sätzen des Euklid, aufwendig bewiesen – wozu wir gerade mal sechs Zeilen Algebra benötigen!

Übrigens: Denken wir uns den Sonnenort N symmetrisch zum Mittelpunkt H gespiegelt, N′. Dann berechnet sich der Abstand zum Ellipsenpunkt M, $\mathrm{N'M} = r'$ zu:

$$r' = a\cdot(1-e\cos\mu).$$

Wir sehen:

$$r + r' = a\cdot(1+e\cos\mu) + a\cdot(1-e\cos\mu) = 2\,a,$$

die Grundlage der bekannten »Faden- oder Gärtnerkonstruktion« für die Ellipse. Die Sonne steht in einem Brennpunkt der Ellipse...

Übrigens: Über den Einstieg mit der exzentrischen Anomalie μ gelangen wir besonders elegant zum Abstand r als Funktion der ausgeglichenen Anomalie φ, des Positionswinkels an der Sonne N. Siehe Formel I. im Kasten auf S. 50 in »Sterne und Weltraum« 10/2009 und in den Infokästen 1 und 2 weiter oben. Wir entnehmen der Abbildung auf Seite 51:

$$r\cos\varphi = a\cos\mu + a\,e \qquad \text{oder} \qquad \cos\mu = \frac{r\cos\varphi - a\,e}{a}$$

Dies einsetzen in unser $r = a\cdot(1 + e\cos\mu)$ und auflösen nach r ergibt:

$$r = a\cdot\frac{1-e^2}{1-e\cos\varphi}, \quad \varphi \text{ gezählt ab der Aphelrichtung.}$$

Dies ist die auf Seite 50 aufgeführte Formel.

Infokasten 4: Kepler-Planetenellipse. Berechnung der Beschleunigung (modern-analytisch) mit der exzentrischen Anomalie μ, dem keplerschen Mittelpunktswinkel *(anomalia ex centro)*.

Die folgenden Zeilen haben keine historische Relevanz, sie tragen den Charakter einer – nicht ganz unnützen – mathematisch-kinematischen Übung.
Die Notation der x-, y-Komponenten folgt dem Infokasten 2 und der Abbildung auf Seite 51 im Kasten auf Seite 50 und 51 im oben erwähnten Aufsatz.

Ort:

$$\begin{Bmatrix} x(\mu(t)) \\ y(\mu(t)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\cdot(\cos\mu + e) \\ a\sin\mu\cdot\sqrt{1-e^2} \end{Bmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\cdot(-\sin\mu\cdot\dot{\mu}) \\ a\cos\mu\cdot\dot{\mu}\cdot\sqrt{1-e^2} \end{Bmatrix}$$

Der übergestellte Punkt bedeutet wieder die Ableitung nach der Zeit t.

Beschleunigung:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\cdot(-\cos\mu\cdot\dot{\mu}^2 - \sin\mu\cdot\ddot{\mu}) \\ a\cdot(-\sin\mu\cdot\dot{\mu}^2 + \cos\mu\cdot\ddot{\mu})\cdot\sqrt{1-e^2} \end{Bmatrix}$$

Für die Ableitungen nach der Zeit $\dot{\mu}$ und $\ddot{\mu}$ bemühen wir die keplersche Gleichung (Infokasten 3):

$$\frac{t}{T} 2\,\pi - \mu = e \sin \mu . \qquad \text{Diese differenzieren wir zweimal nach der Zeit } t\text{:}$$

$$\frac{2\,\pi}{T} - \dot{\mu} = e \cos \mu \cdot \dot{\mu} \qquad \text{und} \qquad -\ddot{\mu} = -e \sin \mu \cdot \dot{\mu}^2 + e \cos \mu \cdot \ddot{\mu} . \quad \text{Auflösen:}$$

- $$\dot{\mu} = \frac{\frac{2\,\pi}{T}}{1 + e \cos \mu} = \frac{2\,\pi}{T} \cdot \frac{a}{r}$$ (mit Benutzung von $r = a \cdot (1 + e \cos \mu)$, Kepler I.).
- $$\ddot{\mu} = \frac{e \sin \mu \cdot \dot{\mu}^2}{1 + e \cos \mu} .$$

In die Beschleunigung setzen wir $\ddot{\mu}$ ein, so dass dann darin nur noch die erste Ableitung, als $\dot{\mu}^2$, verbleibt. So ergibt sich

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \cdot \dfrac{-(\cos \mu + e) \cdot \dot{\mu}^2}{1 + e \cos \mu} \\ a \cdot \dfrac{-\sin \mu \cdot \dot{\mu}^2}{1 + e \cos \mu} \cdot \sqrt{1 - e^2} \end{Bmatrix} .$$

$a \cdot \dot{\mu}^2$ ziehen wir vor die Klammer und setzen $\dot{\mu}$ ein:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = a \cdot \left(\frac{2\,\pi}{T} \cdot \frac{a}{r} \right)^2 \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{-(\cos \mu + e)}{1 + e \cos \mu} \\ \dfrac{-\sin \mu \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \mu} \end{Bmatrix} .$$

In der geschweiften Klammer erkennen wir:

$$\begin{Bmatrix} -\dfrac{(\cos \mu + e)}{1 + e \cos \mu} \\ -\dfrac{\sin \mu \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{x}{r} \\ -\dfrac{y}{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\varphi + \pi) \end{Bmatrix}, \quad \text{so dass insgesamt}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = 4\,\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\varphi + \pi) \end{Bmatrix} .$$

Dies ist dasselbe Ergebnis für die Beschleunigung, wie wir es im Infokasten 2 mit direkter Benutzung der ausgeglichenen Anomalie φ, des Positionswinkels an der Sonne N, gefunden hatten.

Zum Schluss noch einmal der Hinweis: Diese Berechnung der Beschleunigung mittels der exzentrischen Anomalie μ ist mit moderner Analysis durchgeführt und hat keine historische Relevanz für Kepler und/oder Newton.

Ernst Kühn