wissenschaft in die schulen!

Lösungen zu den Aufgaben

Besuch aus dem Weltall – ein kleiner Asteroid tritt ein in die Erdatmosphäre

Achtung Fehler:
Die Werte für die spezifische Gaskonstante R_s haben als Einheit J/kg/K, nicht, wie angegeben, kJ/kg/K.

1.) *Welche Strecke legt er in einer 20 km dicken Schicht der Erdatmosphäre zurück? Wie lange würde sein Flug durch die Atmosphäre von 160 km Höhe bis zum Boden dauern, wenn es keinen Luftwiderstand gäbe?*

In einer Schicht von 20 km Höhe legt dieser Asteroid 40 km zurück, da die Höhe und die Bahn zusammen ein halbes gleichseitiges Dreieck ergeben. Von 160 km bis zum Boden wäre die Länge der Flugbahn dann 320 km, und der Flug würde 32 s dauern.

2.) *Vom Asteroiden aus gesehen treffen die Luftmoleküle mit einer Geschwindigkeit von 10 km/s auf die Grundfläche des Asteroiden auf und geben dabei ihre Bewegungsenergie ab. Berechne, wie viel Masse der Kleinkörper bis herunter zu einer Höhe von 160 km auffängt. Wie viel Energie wird ihm durch das Auftreffen der Luftmoleküle in den darüber liegenden Schichten zugeführt? Ein Teil dieser Energie wird sicher auch an die Luftschicht direkt unter der Grundfläche abgegeben.*

In einer Höhe von 160 km beträgt der Luftdruck $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ Pa = $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ N/m². Wegen $F = m \cdot g$ wird dieser Druck erzeugt von einer Masse von insgesamt $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ kg/m². Auf eine Fläche von A = 10 m² treffen dann bei der doppelten Weglänge $6{,}7 \cdot 10^{-6}$ kg. Beim Auftreffen wird damit eine Energie von $\frac{1}{2} m v^2 = 0{,}5 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} \cdot (10\,000\ \text{m/s})^2 = 330$ J in 4 s frei.

3.) *Wie ändert sich der Impuls des Körpers durch das Auftreffen der Moleküle der Luft? Dadurch wird der Körper abgebremst. Wie stark ist die Abbremsung bis zur Höhe von 160 km?*

Der Asteroid hat eine Masse von $m = V \cdot \rho = A \cdot h \cdot \rho = 30\ \text{m}^3 \cdot 3\ \text{g/cm}^3 = 90$ t und einen Impuls von $p = m \cdot v = 9 \cdot 10^{8}$ kg m /s. Vom Eintauchen bis 160 km sammelt der Asteroid eine Masse von $m = 6{,}6 \cdot 10^{-6}$ kg auf. Der Impuls dieser Masse ist $p = 6{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} \cdot 10\,000$ m/s ist im Vergleich zum Impuls des Asteroiden so klein, dass die Bewegung davon nicht merklich beeinflusst wird.

4.) *Betrachten wir die Erwärmung des Asteroiden in einer Höhe von 160 km. Wir nehmen an, dass er zu Beginn eine Temperatur von 250 K hat. Wir betrachten die Erwärmung seiner Grundfläche durch alle Moleküle, die oberhalb von 160 km auftreffen. Der Asteroid besteht aus Stein. Wir betrachten dabei eine 1 cm dicke Schicht. Um wie viel steigt die Temperatur der Grundfläche durch die Energieabgabe der auftreffenden Luftmoleküle?*

Wir wählen für die Dichte des Asteroiden ρ = 3 g/cm³ und seine spezifischen Wärmekapazität c_p = 0,9 kJ / (kg · K) ab. Die Schicht über der Grundfläche hat ein Volumen von 0,01 m ·10 m² = 0,1 m³ und damit eine Masse von m = 300 kg. Es werden also 900 J/ (kg K) · 300 kg = 270 000 J benötigt, um diese Schicht um 1 K zu erwärmen. Die Zufuhr von 330 J bewirkt also eine Erwärmung von ΔT = 1 K · 0,33 kJ / 270 kJ = 0,00125 K.

5.) *Welche Wärmemenge wird durch Wärmeleitung in die nächste Schicht des Asteroiden weitergeleitet? Nimm dazu an, dass die Schicht, durch die der Transport hindurch geschieht, 1cm dick ist.*

Wir schätzen dazu die Wärmeleitfähigkeit mit λ = 2 W / (m · K) ab. Eine Temperaturdifferenz ΔT bewirkt dann einen Wärmefluss $W = \lambda \cdot A \cdot \Delta T / d$ = 2 W / (m · K) · 10 m² · 0,00125 K / 0,01 m = 2,5 W.

6.) *Wie viel Energie wird von der Grundfläche nach außen abgestrahlt? Mit welcher Farbe glüht dann der Körper? Wie viel Energie wird dazu aufgewandt, dass das Material des Asteroiden sublimiert? Wie viel Masse verliert er dadurch? Berechne, wie sich diese Energieabgaben auf die Temperatur der Grundfläche auswirken. Der neue Wert für die Temperatur wird dann als Ausgangspunkt für die folgende Rechnung verwendet.*

Die Grundfläche strahlt mit einer Temperatur von 250 K. Er gibt dabei nur Infrarotstrahlung ab. Wenn wir annehmen, dass 80 % der möglichen Strahlung abgegeben wird, so ergibt sich:
$I = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 = 10\ \mathrm{m^2} \cdot 0{,}80 \cdot 5{,}6704 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)} \cdot (250\ \mathrm{K})^4 = 1772\ \mathrm{W}$.
Bei 250 K schmilzt das Material noch nicht und es gibt noch keine Massenverluste. Man erhält damit einen Energieverlust von 4 s · (2,49 W + 1772 W) = 7098 J. Die Temperatur der untersten Schicht erniedrigt sich dadurch um 2,62 mK und bleibt damit bei 250 K.

7.) *Wie viel Masse fängt der Asteroid zwischen 160 km und 140 km auf, und wie würde dies die Temperatur seiner Grundfläche erhöhen? Wie stark würden Abstrahlung, Wärmeleitung und Verdampfung diese neue Temperatur wieder erniedrigen? Wie stark würde der Körper in dieser Schicht durch die auftreffenden Moleküle abgebremst?*

Die Masse der Materie, die beim Eintritt in die Atmosphäre bis herunter zu 140 km aufgefangen wird, beträgt $2 \cdot 7{,}4 \cdot 10^{-4}$ Pa · 10 m² / g = $1{,}50 \cdot 10^{-3}$ kg. Bis 160 km wurden $6{,}6 \cdot 10^{-6}$ kg aufgefangen, zwischen 160 und 140 km also $1{,}509 \cdot 10^{-3}$ kg - $6{,}6 \cdot 10^{-6}$ kg = $1{,}502 \cdot 10^{-3}$ kg. Durch diese auftreffende Materie wird eine Energie von $0{,}5 \cdot 1{,}502 \cdot 10^{-3}$ kg · (10 000 m/s)² = 75,1 kJ zugeführt. Sie erwärmen die Schicht um 75,1 kJ : 270 kJ/K = 0,278 K. Der Wärmefluss in den Asteroiden hinein beträgt dann 2 W / (m · K) · 10 m² · 0,278 K / 0,01 m = 556 W. Der Energieverlust durch Abstrahlung beträgt 1772 W. Da die Temperatur so niedrig bleibt, kann man die Verdampfung auch hier vernachlässigen.

8.) *Berechne dann, wie viel Masse der Asteroid zwischen 140 km und 120 km auffängt, wie groß dann die Energieverluste dort sind und welche neue Temperatur sich damit bei 120 km ergibt.*

Die aufgefangene Materie hat die Masse $m = 2 \cdot (2{,}7 \cdot 10^{-3} - 7{,}4 \cdot 10^{-4}$ Pa) · 10 m² / g = $4{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg. Sie gibt eine Energie von $6{,}6 \cdot 10^{3}$ J ab und erwärmt die Grundfläche um 0,74 K. Die Wärmeleitung entfernt nun 1,48 kW, die Abstrahlung 1,80 kW.

9.) *Führe dann nacheinander für jede der angegebenen Höhen bis herunter zum Boden diese Rechnungen durch.*

Wir berechnen zunächst, wie groß die Masse der Luft ist, die in den 20 km dicken Schichten von der Grundfläche aufgefangen wird: $m(z) = 2 \cdot [p(z + 20\text{ km}) - p(z)] \cdot A/g$.
$p(z)$ ist hier der Druck in der Höhe z, A ist der Flächeninhalt der Grundfläche und g die Schwerebeschleunigung. Die in dieser Schicht aufgefangene Luft führt dem Körper die Energie $E(z) = ½ \cdot m(z) \cdot v^2$ zu. Dadurch erhöht sich die Temperatur der Grundfläche um $\Delta T(z) = T(z) - T(z + 20\text{ km})$.

$$\Delta T(z) = \frac{E(z)}{c_p \cdot \rho \cdot A \cdot d}.$$

Wir verwenden dabei zur Rechnung eine Schichtdicke d = 1 cm, eine Dichte $\rho = 3000\ \text{kg/m}^3$ und eine spezifischen Wärme von $c_p = 900$ J/(kg K). Für die abgestrahlte Leistung gilt dann $P_{Strahlung} = A \cdot 0{,}8 \cdot \sigma \cdot T(z)^4$, der Energieverlust durch Wärmeleitung kann dann zunächst abgeschätzt werden mit $P_{Wärmeleitung} = \lambda \cdot A \cdot [T(z) - 250\text{ K}] / d$. Den Wärmeverlust $P_{Verdampfung}$ durch Abdampfen schätzen wir dadurch ab, dass wir annehmen, der Körper besteht zur Hälfte aus Fosterit und zur Hälfte aus

Fayalit. Da unser Kleinkörper in jeder Schicht 4 Sekunden braucht, müssen die drei Energieverluste mit 4 s multipliziert werden. Die Rechnung liefert dann:

z	p(z)	m(z)	E(z)	T	Abstrahlung	Wärmeleitung	Verdampfung	Energieverlust	T
km	*Pa*	*kg*	*J*	*K*	*W*	*W*	*W*	*J*	*K*
				250,0					
160	3,30E-06	6,73E-06	3,36E+02	250,0	1,77E+03	5,00E+05	1,76E-95	2,01E+06	241,6
140	7,40E-04	1,50E-03	7,51E+04	250,3	1,78E+03	5,01E+05	2,35E-95	2,01E+06	241,9
120	0,002700	4,00E-03	2,00E+05	251,0	1,80E+03	5,02E+05	5,06E-95	2,02E+06	242,6
100	0,03	5,57E-02	2,78E+06	261,3	2,12E+03	5,23E+05	1,42E-90	2,10E+06	252,6
80	0,86	1,69E+00	8,46E+07	574,7	4,95E+04	1,15E+06	1,44E-31	4,80E+06	554,7
60	19	3,70E+01	1,85E+09	7423,3	1,38E+09	1,48E+07	2,93E+17	1,17E+18	

Die bisherige Rechnung wird ab 60 km unsinnig. Da die Energieabgabe der Grundfläche durch Abstrahlung, Wärmeleitung und Verdampfung nur von der Temperatur der Grundfläche abhängt, berechnet man für eine Reihe von Temperaturen die Energieabgabe und den Massenverlust.

Energieverlust als Funktion der Temperatur

T / *K*	Abstrahlung / *W*	Wärmeleitung / *W*	Verdampfung / *W*	Energieverlust / *J*	Massenverlust / *kg*
250	1,77E+03	0,00E+00	1,75E-95	7,09E+03	0
500	2,84E+04	5,00E+05	6,51E-39	2,11E+06	0
750	1,44E+05	1,00E+06	5,08E-20	4,57E+06	0
1000	4,54E+05	1,50E+06	3,71E-10	7,81E+06	0
1500	2,30E+06	2,50E+06	8,59E+00	1,92E+07	0
2000	7,26E+06	3,50E+06	1,43E+06	4,88E+07	0,43
2500	1,77E+07	4,50E+06	1,91E+09	7,72E+09	578,11
3000	3,67E+07	5,50E+06	2,28E+11	9,11E+11	68996,06

Der Energieverlust steigt außerordentlich stark mit der Temperatur. In einer Höhe von 60 km ist die Energieaufnahme so groß, dass die Temperatur auf fast 2500 K steigen muss, um eine entsprechende Energieabgabe zu gewährleisten. Eine Temperaturzunahme um 1900 K bewirkt eine Zunahme der inneren Energie um etwa $0{,}5\cdot 10^9$ J. Der Energieverlust muss deshalb etwa $1{,}35\cdot 10^9$ J betragen, dies entspricht einer Temperatur von etwa 2410 K. Die folgenden Temperaturzunahmen sind viel kleiner, und die Erhöhung der inneren Energie kann deshalb vernachlässigt werden. Bei Temperaturen über 1500 K ist der Meteorit weißglühend. Die Temperaturen in der folgenden Tabelle werden gewonnen, indem man in der obigen Tabelle in einer Tabellenkalkulation den Wert für die Temperatur so lange angepasst, bis der damit berechnete Energieverlust genau so groß ist wie die Energiezufuhr.

Energieaufnahme

z	p(z)	m(z)	E(z)	T(z)	Massenverlust
km	*Pa*	*kg*	*J*	*K*	*kg*
60	19	3,70E+01	1,85E+09	2379	134
40	300	5,73E+02	2,86E+10	2620	2155
20	5400	1,04E+04	5,20E+11	2931	39332
0	101000	1,95E+05	9,75E+12	3331	737478

Die Energieaufnahme in der Schicht unterhalb von 20 km ist so groß, dass dort der Asteroid mit der Masse von 90 t vollständig verdampft.

10.) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper am Boden auf, welche Energie wird dabei freigesetzt?

Bis herunter zu einer Höhe von 40 km kann der Impuls der auftreffenden Luft vernachlässigt werden. Zwischen 40 km und 20 km treffen etwa 90 t des Asteroiden mit 10 km/s auf 10 t stehende Luft. Wenn man annimmt, dass der Asteroid diese Luft vor sich herschiebt, bewegt er sich dann mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{90\,t \cdot 10\,km/s + 10\,t \cdot 0\,km/s}{90\,t + 10\,t} = 9\,km/s$. Damit reduziert sich die Energieabgabe der auftreffenden Teilchen um 19 %.

Unterhalb von 20 km treffen 51 t des Asteroiden auf 195 t Luft. Ohne Verdampfung würde dies die Geschwindigkeit auf (51 t · 9 km/s) / (195 t + 51 t) = 1,87 km/s absenken und so die Energiezufuhr auf 4,3 % reduzieren, d. h. auf $4{,}2 \cdot 10^{11}$ J. Damit dürfte die Temperatur des Asteroiden sogar wieder abnehmen auf 2906 K mit einem Massenverlust von mindestens 31,6 t. Das Auftreffen einer Masse von 20 t mit einer Geschwindigkeit von 1,87 km/s würde eine Energie von $3{,}5 \cdot 10^{10}$ J freisetzen. Da die Abbremsung während des Fallens innerhalb dieser Schicht geschieht, dürfte die mittlere Geschwindigkeit und damit der Massenverlust deutlich höher sein. Sollte der Asteroid zerbrechen, dürfte die Abbremsung noch größer werden. Es ist nicht auszuschließen, dass der Körper zum allergrößten Teil verdampft.

11.) Wie breitet sich die Wärme im Inneren des Asteroiden aus, während er durch die Atmosphäre fällt? Zerlege ihn dazu in 10 Schichten parallel zur Grundfläche, zunächst alle mit einer Temperatur von 250 K. Bei 160 km führt die Aufheizung der Grundfläche (=Schicht 1) zu einem Wärmeübergang nach Schicht 2. Dadurch erhöht sich die Temperatur der Schicht 2. Bei 140 km berechnet man daraus den Wärmeübergang zwischen der Grundfläche und Schicht 2 und den Wärmeübergang zwischen Schicht 2 und Schicht 3. Daraus lassen sich dann die Temperaturen der Schichten 1 - 3 in der Höhe 120 km abschätzen. Entsprechend kann man so nacheinander die Temperaturen der einzelnen Schichten bei 100 km, bei 80 km, bei 60 km, bei 40 km, bei 20 km und bei 0 km berechnen.

Im Zeitraum $\tau = 4$ s fließt die Wärmemenge $Q = \lambda \cdot \frac{A}{d} \cdot (T_a - T_b) \cdot \tau$ von der Schicht a in die Schicht b. In der Schicht b mit der Masse m erhöht sie die Temperatur um $\Delta T = \frac{Q}{c_p \cdot m}$.

Wir nehmen dabei an: m = 300 kg, λ = 2 W / (m · K), A/d = 1000 m.

Temperaturen der Schichten des Asteroiden

Schicht	1,0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
160 km	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
140 km	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
120 km	251	250	250	250	250	250	250	250	250	250
100 km	261	251	250	250	250	250	250	250	250	250
80 km	569	261	251	250	250	250	250	250	250	250
60 km	2410	574	261	251	250	250	250	250	250	250
40 km	2690	2437	578	262	251	250	250	250	250	250
20 km	3000	2694	2465	583	262	251	250	250	250	250

Bei 40 km und 20 km sind die äußeren Schichten schon verdampft, die Wärme ist also tiefer eingedrungen als hier sichtbar.

12.) *Was würde geschehen, wenn der Asteroid ein schmutziger Schneeball wäre, der 90 % der auftreffenden Strahlung absorbiert?*

Die in jeder Schicht aufgenommene Wärme wäre genau so groß wie beim Steinmeteoriten. Schätzen wir die Dichte des Schneeballs mit 600 kg/m^3 ab, so benötigt die 1 cm dicke Schicht über der Grundfläche 36 kJ, wenn man sie um 1 K erwärmen will. Die Zunahme der inneren Energie kann man deshalb unterhalb von 100 km gegenüber der Energieaufnahme und Energieabgabe vernachlässigen. Auch hier wurden die Temperaturen in einer Tabellenkalkulation so variiert, dass die Energieverluste durch Wärmeleitung, Abstrahlung und Verdampfung genau so groß wurden wie die Energiezufuhr.

Temperatur und Massenverlust beim schmutzigen Schneeball

z	p(z)	m(z)	E(z)	T(z)	Massenverlust
km	*Pa*	*kg*	*J*	*K*	*kg*
160	3,30E-06	6,73E-06	3,36E+02	250	0
140	7,40E-04	1,50E-03	7,51E+04	250	0
120	0,002700	4,00E-03	2,00E+05	250	0
100	0,03	5,57E-02	2,78E+06	250	0
80	0,86	1,69E+00	8,46E+07	275	13
60	19	3,70E+01	1,85E+09	365	276
40	300	5,73E+02	2,86E+10	375	4251
20	5400	1,04E+04	5,20E+11	460	79117

Bei über 20 km Höhe ist der Asteroid vollständig verdampft. Dies geschieht in einer sehr kurzen Zeit, der Asteroid explodiert also, ohne weitere Spuren zu hinterlassen.