

# Platonische Fraktale im Unterricht

Gegenüber den beliebten Fraktalbildern führen dreidimensionale Fraktale ein Schattendasein. Nur wenige treiben den Aufwand, sie leibhaftig herzustellen. Aber die (beträchtliche) Mühe wird reich belohnt. Wo sonst kann man auf Schulniveau noch echte Neuentdeckungen vollbringen?

Wilhelm Sternemann, Gymnasium Canisianum, Disselhook 6, 59348 Lüdinghausen, sternemann@t-online.de

Fraktale gehören heute fast so selbstverständlich zum Allgemeinwissen wie Gerade, Kreis und Kugel. Diese mathematischen Objekte genießen auch in der Fachdidaktik wachsendes Interesse, sind aber in den Mathematiklehrplänen nicht entsprechend berücksichtigt. Dabei können sie den Mathematikunterricht auf vielfache Weise unterstützen.

Dieser Beitrag richtet den Blick auf einige räumliche Fraktale und ergänzt den Beitrag von Christoph Pöppe [1] aus dem Blickwinkel eines unterrichtenden Mathematiklehrers. Aus langjähriger Erfahrung gespeist, bietet er fachdidaktische Hintergründe und Anregungen für den Unterricht.

## 1. Fraktale im Unterricht – Zur Vorgeschichte

Fraktale genießen heute großes Interesse. Google findet allein zum deutschsprachigen Suchwort „Fraktal“ weit über 500.000 Einträge und zum englischen „fractal“ sogar mit über 40 Millionen Seiten das 80-Fache. Die faszinierenden Computerbilder, aber auch die Symmetrieeigenschaft der Selbstähnlichkeit und die gebrochene Dimension bilden eine Inspirationsquelle in allen Wissensgebieten, bis in die Kunst und Musik. Der Mathematik kommt bei solchem vielschichtigen Interesse eine klärende Rolle zu, so dass Fraktale (und Chaos) durchaus zu einer mathematischen Allgemeinbildung gehören wie die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, reelle Zahl, Funktion oder Menge.

Im Mathematikstudium begegnet man Fraktalen eher am Rande, etwa in der Analysis dem Cantorstaub als einer total unzusammenhängenden, nur aus Rand und aus Häufungspunkten bestehenden überabzählbaren Menge mit dem Maß Null, der Kochkurve als einer stetigen, aber nirgends glatten unendlich langen Linie usw. Aber ein zentrales Thema sind die Fraktale nicht.

Diese widersprüchliche Situation versetzt den Lehrer, der seinen Schülern das Gebiet nahe bringen möchte, in eine merkwürdig gemischte Lage.

Einerseits ist das Thema durchaus in der Reichweite des Mathematikunterrichts. Ich selbst habe in der 9. und 10. Klasse mehrfach und in verschiedenen Varianten Unterrichtsreihen über dynamische Systeme und Fraktale abgehalten. In den 90-ern gab es auch noch die Möglichkeit, das Thema auf höherem Level im Leistungskurs der 13 zu behandeln.

Andererseits ist das Gebiet noch längst nicht so aufgeräumt, wie wir das etwa bei der klassischen Analysis zu schätzen gelernt haben. Schon für den zentralen Begriff „Fraktal“ gibt es keine allgemein akzeptierte Definition [7, Einl. S. xx]. Eine einheitliche fachdi-

daktische Aufarbeitung steht noch aus. Man muss als Lehrer alles Gelesene selbständig kritisch hinterfragen und ist an vielen Stellen gezwungen, eine eigene Position zu entwickeln. Dass Fraktale Gegenstand des Lehrplans werden, ist für die absehbare Zukunft nicht zu erwarten. Also werden sie sich mit den immer enger werdenden Nischen begnügen müssen; in Nordrhein-Westfalen bietet der nicht-sprachliche Differenzierungsunterricht der Mittelstufe eine solche Gelegenheit.

Aus eben diesen Gründen ist das Gelände an vielen Stellen noch weitgehend unbeackert. Man hat die ziemlich einmalige Gelegenheit, auf Schulniveau Dinge zu entdecken und zu erforschen, über die sich sonst noch niemand Gedanken gemacht hat. Das motiviert die Schüler gewaltig, und den Lehrer natürlich auch.

Von solchen Entdeckungen soll hier berichtet werden. Sie handeln von dreidimensionalen (räumlichen) Fraktalen. Die große Mehrheit der Programmierer von Fraktalbildern lässt sich mit ihnen nicht ein, weil sie auf dem Bildschirm (und dem Papier) nur mühsam und unvollkommen wiederzugeben sind. Um sie wirklich zu (be-)greifen, haben wir sie „in echt“, zum Anfassen, hergestellt. Das ist zwar noch mühsamer, aber die Mühe lohnt sich.

Zuvor aber möchte ich kurz Teile des von mir im Unterricht bevorzugten Wegs durch den Dschungel der Fraktal-Begriffe skizzieren.

## 2. Fachmathematische Grundbegriffe zu Fraktalen im Unterricht

Anstelle einer „offiziellen“ Definition von Fraktal, die es sowieso nicht gibt, hat sich in meinem Unterricht die folgende Erklärung bewährt. Sie greift auf die besonders wichtige qualitative Eigenschaft zurück, die sich beim „Zoomen“ („Ausschnittvergrößern“) zeigt.

*Erklärung 1: Fraktale sind komplexe geometrische Figuren, die beim wiederholten Zoomen immer wieder neue Details erkennen lassen.*

(Diese Formulierung findet sich fast wortgleich in [9].) Es lohnt sich, dabei deutlich zwischen dem mathematisch idealisierten Fraktal, bei dem man unbegrenzt zoomen kann, und einem realen Fraktal (Beispiel: Broccoli Romanesco) zu unterscheiden, bei dem dies nur in einem begrenzten Skalenbereich möglich ist. Das gibt eine hervorragende Gelegenheit, das Verständnis für mathematisches Modellieren zu vertiefen.

Viele Fraktale werden durch *Iteration* erzeugt: Auf eine Ausgangsfigur wird eine geometrische Operation angewandt, auf das Ergebnis, genauer: auf Teilfiguren (vorzugsweise verkleinerte Kopien) der Ausgangsfigur, wird die gleiche Operation angewandt, auf

die Ergebnisse wieder und so weiter. Dadurch entsteht eine Folge von Figuren, die bei geeignet gewählten Operationen gegen eine Grenzfigur konvergiert. Diese Vorgehensweise kennen wir aus der Mathematik der Antike. Die Schüler haben hier eine der schönsten Gelegenheiten, mit dem Unendlichen in der Mathematik in Berührung zu kommen.

Die **Grenzfigur**, das eigentliche Fraktal, ist nicht realisierbar und nur über einen Abstraktionsprozess zu erschließen; unmittelbar zugänglich sind für den Schüler nur die ersten wenigen **Iterationsfiguren**. Da verwechselt er leicht das eine mit dem anderen. Auch in der Literatur findet man Beispiele, wo etwa bei Messungen zu Fraktalen nicht oder nur unsauber zwischen Iterationsfiguren und Grenzfigur unterschieden wird.

Ein zentraler Begriff der fraktalen Geometrie ist die Selbstähnlichkeit, auch wenn viele Fraktale im Sinne von Erklärung 1 nicht selbstähnlich sind, viele nichtfraktale Figuren aber sehr wohl.

**Definition 2:** Eine Figur heißt **selbstähnlich**, wenn sie eine verkleinerte Kopie (= Bild einer zentrischen Streckung) ihrer selbst als Teilfigur enthält.

**Definition 3:** Eine Figur heißt **streng selbstähnlich**, wenn sie – bis auf Ränder – ohne Lücken und Überschneidungen in verkleinerte Kopien ihrer selbst zerlegt werden kann.

Selbstähnlichkeit ist bei den durch Iteration erklärten Fraktalen immer nur in der Grenzfigur zu untersuchen. Und das ist nicht immer einfach, da letztere selbst meist nicht gezeichnet werden kann, sondern nur ein vorgestelltes Gedankending ist. Man kann oft nicht auf Grund der ersten Iterationsfiguren genau vorhersagen, ob sich Teilfiguren in späteren Iterationsschritten doch noch irgendwo überlappen. Mir als Lehrer blieb nur, durch geeignete Wahl von eindeutigen Aufgabenbeispielen solchen Problemen aus dem Wege zu gehen.

Dass Fraktale typischerweise eine nicht-ganze, gebrochene Dimension haben, pflegt die Schüler stark zu beeindrucken, da das mit ihrer Vorstellung von Dimension in krassstem Widerspruch steht. Als die mathematisch sauberste Definition der fraktalen Dimension gilt die Hausdorff-Dimension; sie ist allerdings für Schulzwecke zu schwierig. Als allgemeine Begriffe für die Schule gut geeignet sind die Boxcounting- („Kästchenzähl“-)dimension und die Zirkelzähl-dimension [13]. Für die hier zu besprechenden, streng selbstähnlichen Fraktale kommt man sogar mit einem speziellen, relativ einfachen Dimensionsbegriff aus, der Selbstähnlichkeitsdimension:

**Definition 4a:** Eine streng selbstähnliche Figur, die sich exakt in  $a$  um den Faktor  $f = 1/k$  verkleinerte Kopien ihrer selbst zerlegen lässt, hat als fraktale Dimension die Zahl  $d$  mit  $a = k^d$  [ $\Leftrightarrow d = \log(a) / \log(k)$ ].

Motiviert wird das durch Rückgriff auf die Mittelstufengeometrie: Die Definition besagt ja umgekehrt, dass beim Zoomen von  $F$  mit dem Faktor  $k$  eine Figur  $F'$  aus  $a$  Exemplaren von  $F$  entsteht, dass also  $F$  sich beim Vergrößern um den Faktor  $k$  auf das  $a$ -Fache vermehrt. Bei Flächen und Volumina kennen die Schüler aus der Geometrie der zentrischen Streckung Ähnliches: Beim Zoomen mit Faktor  $k$  werden aus einem Quadrat  $a = k^2$  Quadrate der ursprünglichen Größe und aus einem Würfel  $a = k^3$  Stück. Dort ist die Dimension Exponent im Wachstumsfaktor beim Zoomen. Diesen Exponenten nennen wir auch in den neuen Beispielen weiterhin Dimension.

Wenn eine Figur allgemeiner in endlich viele Kopien ihrer selbst mit nicht nur gleichen Verkleinerungsmaßstäben zerlegbar ist (Abb. 1, 2), gibt es entsprechend eine Verallgemeinerung der Selbstähnlichkeitsdimension. Sie kommt in der Literatur weniger häufig vor, ist aber gleichwohl für den Mathematikunterricht interessant.

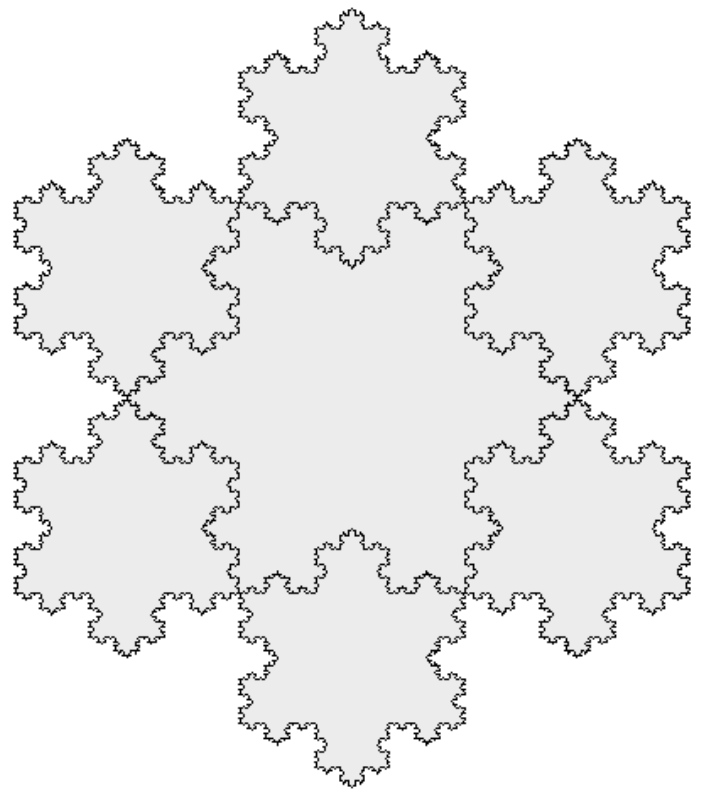


Abb. 1: Strenge Selbstähnlichkeit der Kochinsel als 7teilige Fläche mit  $6 \cdot (1/3)^d + (\sqrt{3}/3)^d = 1$ , also  $d = 2$ .

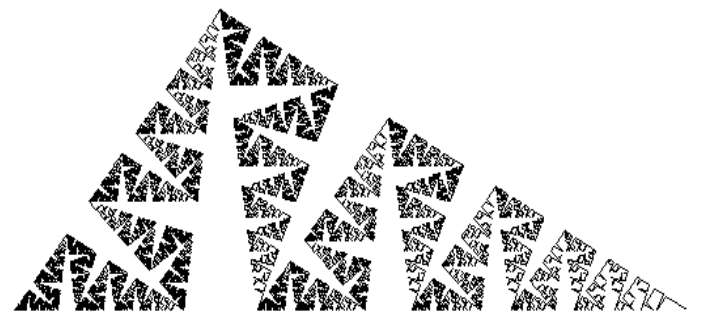


Abb. 2: Strenge selbstähnliche veränderte Schneeflockenkurve aus zwei Teilen.  $f_1 = 0,5$  und  $f_2 = 0,8$ .  $0,5^d + 0,8^d = 1$  mit  $d = 1,678522527\dots$

**Definition 4b:** Eine streng selbstähnliche Figur  $F$ , die sich exakt in endlich viele verkleinerte Kopien  $F_1, F_2, \dots, F_a$  mit den Verkleinerungsmaßstäben  $f_1, f_2, \dots, f_a$  zerlegen lässt, hat als fraktale Dimension  $d$  die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung  $f_1^d + f_2^d + \dots + f_a^d = 1$ .

Im Unterricht kann man gut herleiten, dass 4a ein Spezialfall von 4b ist:  $f = f_1 = f_2 = \dots = f_a$ . Die Gleichung aus Definition 4b (zum Beispiel  $6 \cdot (1/3)^d + (\sqrt{3}/3)^d = 1$  in Abb.1 oder  $0,5^d + 0,8^d = 1$  in Abb. 2) ist im Allgemeinen nicht algebraisch nach  $d$  auflösbar.  $d$  ist oft nur mit numerischen Verfahren (Intervallschachtelungen kennt man auch schon in der Mittelstufe!) bestimmbar. Das macht diesen Begriff interessant für einen anspruchsvollen Mathematikunterricht. Die Existenz einer eindeutigen Lösung wäre in der Oberstufe über die strenge Monotonie der stetigen Funktion  $f: d \mapsto 0,5^d + 0,8^d$  und den Zwischenwertsatz beweisbar.

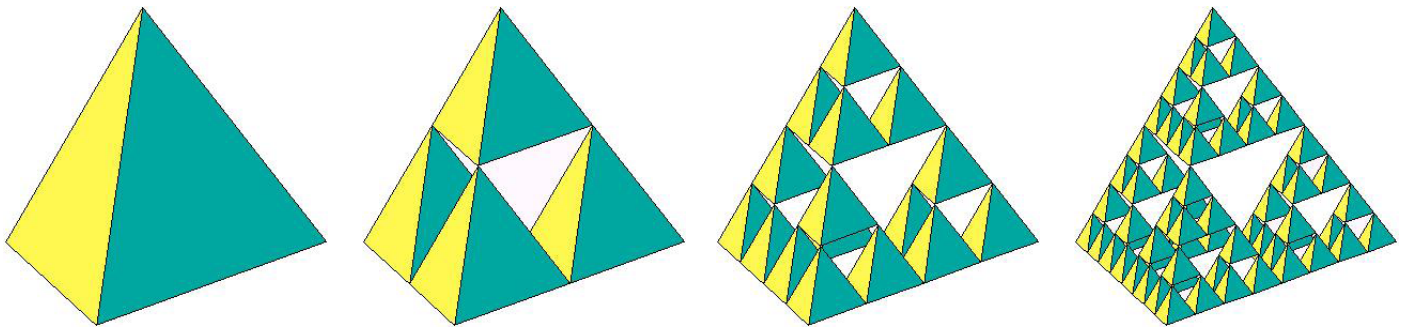


Abb.3: Tetraeder und die ersten drei Iterationsfiguren des Sierpiński-Tetraeders

### 3. Räumliche Fraktale zum Angewöhnen: Sierpiński-Pyramide und Mengerschwamm

In der einschlägigen Literatur [4], [5] fanden sich derzeit unter dem Stichwort „räumliche Fraktale“ im Wesentlichen zwei Objekte: das Sierpiński-Tetraeder („Sierpiński-Pyramide“) und der Mengerschwamm. In neueren Büchern (siehe u. a. [2]) ist die Situation ein wenig verbessert.

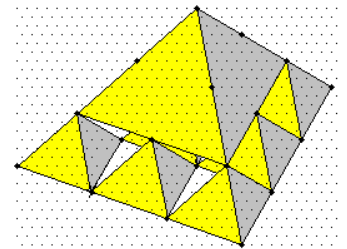
Die Iterationsvorschrift zum **Sierpiński-Tetraeder** ist einfach erklärt: Man bilde ein regelmäßiges Tetraeder durch vier zentrische Streckungen mit dem Faktor  $1/2$  und den Streckungszentren in den vier Tetraederecken ab. Es entstehen vier Tetraeder der halben Kantenlänge, die sich jeweils zu zweit an einer Ecke berühren. Diese Prozedur wird iteriert (Abb. 3).

Man kann nicht genug empfehlen, die Schüler eigenhändig diese Figur zeichnen zu lassen. In einem Arbeitsheft aus Bremen [14] wurde das Zeichnen durch ein Punktraster und Hilfen erleichtert, dennoch war es für die Schüler eine echte Herausforderung, in dieses Raster hinein die 3. Iterationsstufe fehlerfrei hineinzuzichnen.

Nach solchem „eigenhändigen“ Kennenlernen gibt es noch viele interessante Aufgaben:

- Welche (überraschende!) Form hat der erste im Innern weggelassene Hohlraum?
- Berechne die (steigende) Gesamtkantenlänge und das (fallende) Volumen der  $n$ -ten Iterationsfigur.
- Die Bestimmung der Selbstähnlichkeitsdimension liefert das glatte Ergebnis  $\log(4)/\log(2) = 2$ . Für eine „fraktale“ Dimension sehr verblüffend: Fraktale haben nicht nur gebrochene Dimension. Dieses räumliche Fraktal hat die gleiche Dimension wie eine Fläche.
- Zeichne das entstehende Bild, wenn man genau parallel zur Verbindungsgeraden zweier Kantenmitten auf die Figur schaut. Damit zeigt sich auch die völlig dichte Schattenfläche der Grenzfigur, des Fraktals selbst, bei einer einzigen singulären passenden Position und die fast völlige Lichtdurchlässigkeit bei der kleinsten Abweichung davon.
- Bei der Suche nach neuen Aufgaben begann ich früh, mit verwandten Pyramiden zu arbeiten, z. B. aus  $n = 10$  mit dem Zoom-

Abb.4: Ein Tetraeder aus einem großen und sechs kleinen Tetraedern, in der ersten Iterationsstufe.



faktor  $f = 1/3$  verkleinerten Kopien mit etwas größerer fraktaler Dimension:  $\log(10)/\log(3) = 2,09590\dots$ . Interessierte Schüler konnten weiter fortsetzen, indem sie zu  $f = 1/k$  die Formel  $n = k(k+1)(k+2)/6$  erknoelbten (die „Pyramidenzahlen“) und experimentell (z. B. mit Excel) die Frage überprüfen, wie groß  $d = \log[(k+2) \cdot (k+1) \cdot k/6] / \log(k)$  bei wachsendem  $k$  wird.

- Auch die Figur mit 6 Kopien der Größe  $f = 1/3$  (auf dem Boden) und einer der Größe  $f = 2/3$  (darüber) ist für die Klasse 10 schon zugänglich. Die Lösung der Gleichung  $6 \cdot (1/3)^d + (2/3)^d = 1$  kann grob, aber mit System eingegrenzt werden (Abb. 4).
- Ebenso wie vom Sierpiński-Dreieck über die geraden Zahlen im Pascaldreieck zu den binomischen Formeln  $(a+b)^n = \dots$  kommt, so kommt man auch von der Sierpiński-Pyramide über die geraden Zahlen in einer „Pascalpyramide“ zu den trinomischen Formeln  $(a+b+c)^n = \dots$

Der **Mengerschwamm** (Abb. 5) ergibt sich aus der Iteration der folgenden Abbildung: Man zerlege zunächst einen Würfel in  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  Teilwürfel. Von diesen lasse man den im Zentrum sowie die sechs Stück in den Flächenmitten weg, sodass den ursprüngliche Würfel drei Löcher mit quadratischem Querschnitt durchziehen. Die Iterationsabbildung macht aus einem großen Würfel die zwanzig verbleibenden kleinen Würfel.

Wieder finden sich interessante Aufgaben:

- Zeichne derlei komplexe Würfelfiguren perspektivisch von Hand. Wegen des großen Aufwandes muss es wohl bei der zweiten Iterationsfigur enden.
- Wie oben gilt es Volumen und Kantenlänge der Iterationsfiguren zu bestimmen.

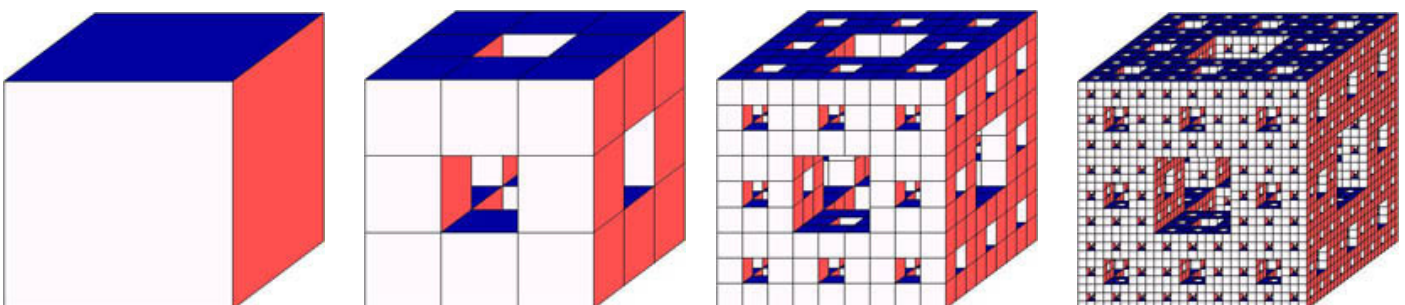


Abb.5: Würfel und die ersten drei Iterationsfiguren zum Mengerschwamm

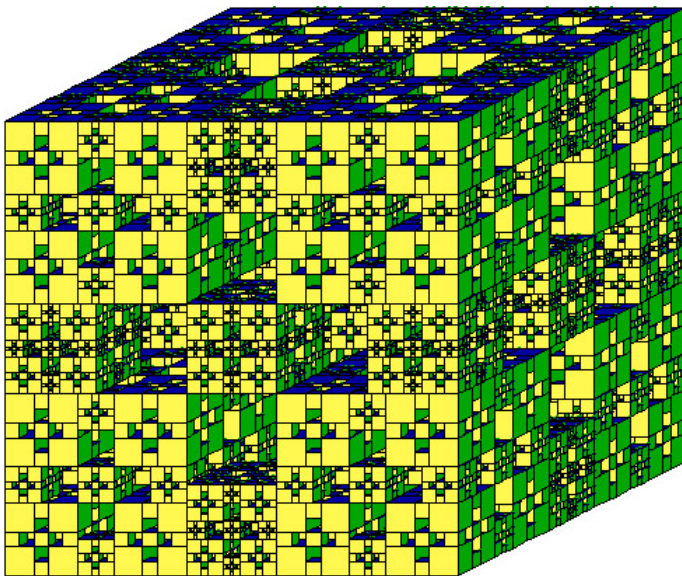


Abb. 6: Mengerschwammvariation mit zwei verschiedenen Streckfaktoren  $f_1 = 0,4$  und  $f_2 = 0,2$ .

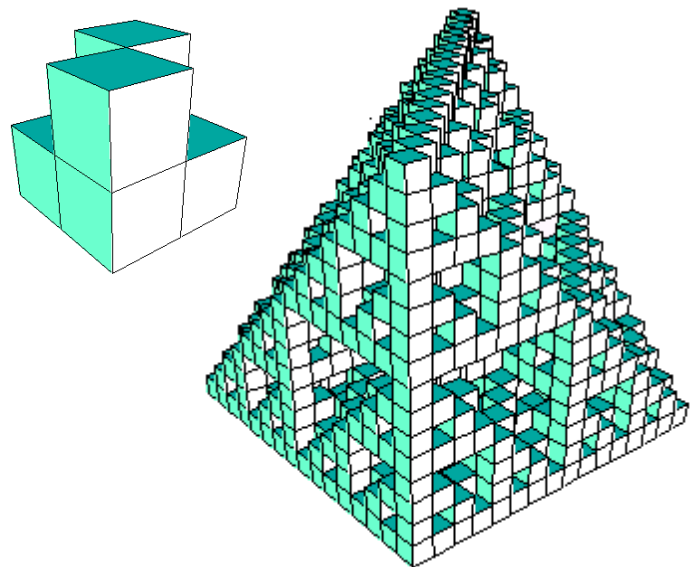


Abb. 7: Mengerschwammvariation zum Faktor  $f = 1/2$ . Die beiden oben diagonal liegenden Würfel wurden aus den 8 entfernt. 1. und 4. Iterationsstufe.

- In die Klasse 10 passt auch gut die Aufgabe: Die wievielte Iterationsfigur besteht aus mehr als  $10^{100}$  Einzelwürfeln, also aus mehr Würfeln, als nach heutigen Schätzungen das Universum Atome hat? (Antwort:  $n = 77$ ).
- Für Klassenarbeiten brauche ich neue, aber verwandte Figuren. Die simpelste Methode: Von den 27 Würfeln kann man mehr oder weniger oder andere Würfel wegnehmen. Wie bei der Pyramide habe ich auch beim Mengerschwamm den Streckfaktor vollständig oder teilweise geändert wie z. B. in  $f_1 = 2/5$  und  $f_2 = 1/5$  (Abb. 6).
- Mit QBASIC (vor 15 Jahren!) programmierten wir die Möglichkeit, dass man aus 2·2·2, 3·3·3, 4·4·4 und 5·5·5 Würfeln beliebige Würfel entfernen und die ersten Iterationsfiguren auf Knopfdruck anschauen kann. Es ergeben sich sofort schöne grafische Experimente (Abb. 7).
- Beim Systematisieren treten kombinatorische Fragen auf wie: Wie viele Möglichkeiten gibt es, von 8, 27, 64, ... Würfeln welche herauszunehmen? Es sind  $2^8 = 256$ ,  $2^{27} = 134\ 217\ 728$ , ...!
- Welche der Möglichkeiten sind wirklich verschieden, also nicht bis auf Drehungen und/oder Spiegelungen identisch? Es ist schon eine schöne Facharbeit, für  $f=1/2$  systematisch zu beweisen, dass von den 256 Möglichkeiten genau 21 wirklich verschieden sind. Man staunt über die Formenvielfalt bei diesen 21 Figuren und die Überraschung, dass andere platonische Körper (Tetraeder und Oktaeder) sich aus dem Würfel bilden können (Abb.7).

Interessant ist gerade dieses Beispiel neben den hervorragenden Möglichkeiten zur Übung im räumlichen Vorstellungsvermögen auch deswegen, weil man hier in der Schule in Neuland forscht. Es ist ganz gut möglich, dass es niemanden außer uns gibt, der diese Frage jemals untersucht hat.

#### 4. Weitere Projekte: Basteln von Figuren zum Anfassen

In der Differenzierung der Jahrgangsstufe 9/10 kann in Nordrhein-Westfalen laut Lehrplan eine Klassenarbeit durch eine sog. Facharbeit ersetzt werden. In meinen Kursen machte ich häufig von dieser Möglichkeit Gebrauch, so dass sich die 4. Klassenarbeit oft gänzlich erübrigte – allerdings um den Preis eines wesentlich größeren Zeitaufwands an kreativer Betreuung und umfangreicherer Korrektur. Kochkurve, Drachencurven, Faltkurven, Küstenlinien,

... ergaben eine Reihe von interessanten Themen zu den ebenen Fraktalen. In den Arbeiten konnten auch selbsterstellte Programme und Computeranimationen eingebracht werden. Als Versuchsballon warf ich den Vorschlag Mengerschwamm und Sierpiński-Pyramide in den Raum mit dem Zusatz: „Man könnte ja ein handfestes Modell bauen, den Bauprozess dokumentieren und/oder etwas zur mathematischen Geschichte der Objekte oder Erfinder sagen.“ Nicola, Bastian und Peter gingen mit Begeisterung an die Arbeit.

Nicola nahm sich den Mengerschwamm vor, dessen 2. Iterationsfigur sie nach langer Grübelphase aus 400 Steckbausteinen (Unterrichtshilfsmittel der Grundschule) zusammenklebte. Die 8000 Bausteine der nächsten Iterationsstufe waren nicht zu bezahlen, wurden aber angedeutet, da die Steckbausteine außen an den Flächenmitten Löcher zeigten (Abb. 8).

Peter klebte einen „Mengerstern“ der 3. Iterationsstufe aus  $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$  Styroporwürfeln zusammen nach der Vorschrift, dass

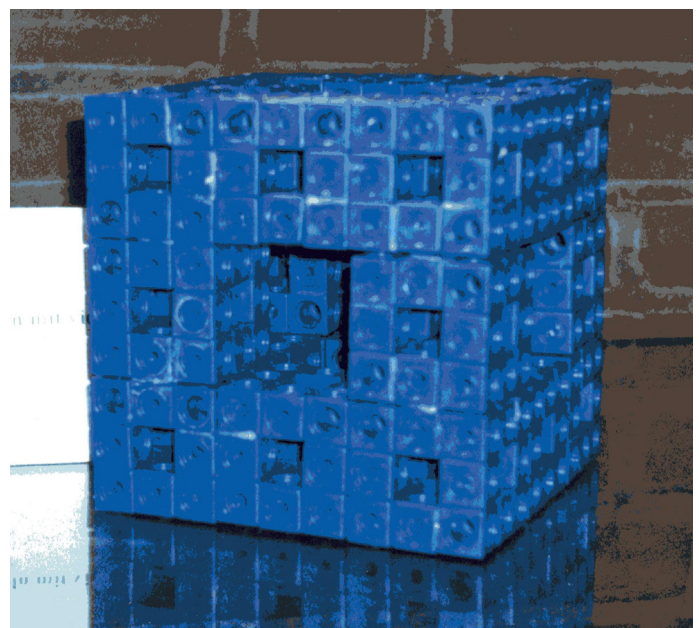


Abb. 8: Nicolas Mengerschwamm

aus jedem Würfel komplementär zum Mengerschwamm dessen 20 Würfel entfernt werden und das innere Kreuz aus sieben Würfeln stehenbleibt. Die Styroporwürfel wurden mit einem glühenden feinen Draht aus Styroporplatten herausgeschnitten. Die Figur musste innen und außen zusätzlich mit stabilem Schweißdraht (5 mm) gestützt werden (Abb. 9 oben).

Bastian hat aus solchen Schweißdrähten in genau erfassten 36 Arbeitsstunden ein Kantengestell der Sierpiński-Pyramide in der 3. Iterationsstufe zusammengelötet. Dieses faszinierende Gebilde gefiel ihm selbst so gut, dass er ernsthaft mit dem Gedanken spielte, diese Objekte in größerer Stückzahl kommerziell zu vermarkten (Abb. 9 unten).

Diese Produkte zum Anfassen mitsamt ihrer Dokumentation wären ohne Weiteres ausreichend für eine Facharbeit gewesen. Aber die Bastler hatten sich darüber hinaus in Leben und Werk der Namensgeber Sierpiński und Menger eingearbeitet und eine überwältigende Fülle an Material zu Tage gefördert. Bastian konnte uns darüber aufklären, dass Sierpiński das nach ihm benannte Dreieck für Zwecke der Grundlagenforschung erfunden hat: als eine Kurve, die nur aus Verzweigungspunkten besteht. Es handelt sich um das zweidimensionale Gegenstück zur Sierpiński-Pyramide; diese hat der Namensgeber selbst anscheinend gar nicht benutzt.

Nicola überraschte mich mit einem Exemplar des historischen Klassikers „Dimensionstheorie“ von Karl Menger [8]. Sie fand dort eine Definition der topologischen Dimension, einer weiteren Spielart der Dimension, die nach meiner Ansicht unserer normalen Vorstellung von Dimension am nächsten kommt. Menger hatte den von ihm erstmalig entwickelten Dimensionsbegriff dort so klar und einleuchtend entwickelt, dass Nicola ihn uns in ihrem Referat vortragen konnte. Quasi als Zugabe erzählte sie uns von dem „Wiener Kreis“, dem Menger angehört hatte. Diese Diskussionsgruppe von zum Teil sehr prominenten Wissenschaftlern, darunter Hans Hahn und Rudolf Carnap, beschäftigte sich intensiv mit der Zukunft der Grundlagen der Mathematik und der Naturwissenschaften und hat richtungsweisende Impulse gegeben [6]. Unversehens waren wir bei den historischen Grundlagenproblemen der Mathematik angelangt – wohlgemerkt: nicht in einem Vorlesungssaal, sondern in einem gewöhnlichen Klassenraum.

Überhaupt bietet der Wiener Kreis mit seinen vielen Verbindungen zur Architektur, zur Philosophie und – wegen seiner Zerschlagung durch die Nationalsozialisten – zur Geschichte eine Fülle von Anlässen für fächerübergreifende Projekte. Eigentlich ist es ein Zeichen für die klägliche Geschichtslosigkeit unserer Mathematikausbildung, dass man im Studium dem Wiener Kreis nicht begegnet.

## 5. Neue platonische Fraktale

Die beiden platonischen Körper Würfel und Tetraeder haben in Gestalt des Mengerschwamms bzw. des Sierpiński-Tetraeders beide ihr klassisches Fraktal. Aber was ist mit den übrigen platonischen Körpern Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder? Gibt es zu ihnen Fraktale nach demselben Konstruktionsprinzip?

Trotz intensiver Bemühungen fand ich in der Literatur und in dem vor 10 Jahren schon recht umfangreichen Internet nichts. Damit war die spannende Idee geboren, selbst etwas zu erfinden. Schwer konnte das doch nicht sein! Die Frage ging mir nicht mehr aus dem Kopf.

Gesucht war für Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder eine Iterationsvorschrift. Das durch sie definierte Fraktal sollte streng selbstähnlich sein und aus lauter verkleinerten Oktaedern, Ikosaedern bzw. Dodekaedern bestehen.

Die Antwort war einfacher als erwartet. Als Erstes musste man erkennen, dass der Mengerschwamm als Vorbild ungeeignet ist. Dass die verkleinerten Kopien des Ursprungskörpers so schön flächig aneinanderpassen, kommt außer beim Würfel bei keinem platonischen

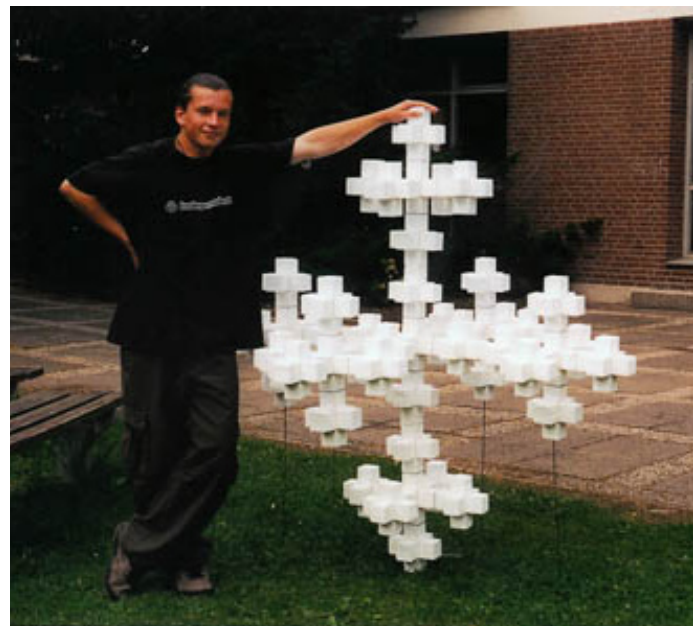


Abb. 9: Peters Mengerstern (oben) und Bastians Sierpiński-Tetraeder (unten)

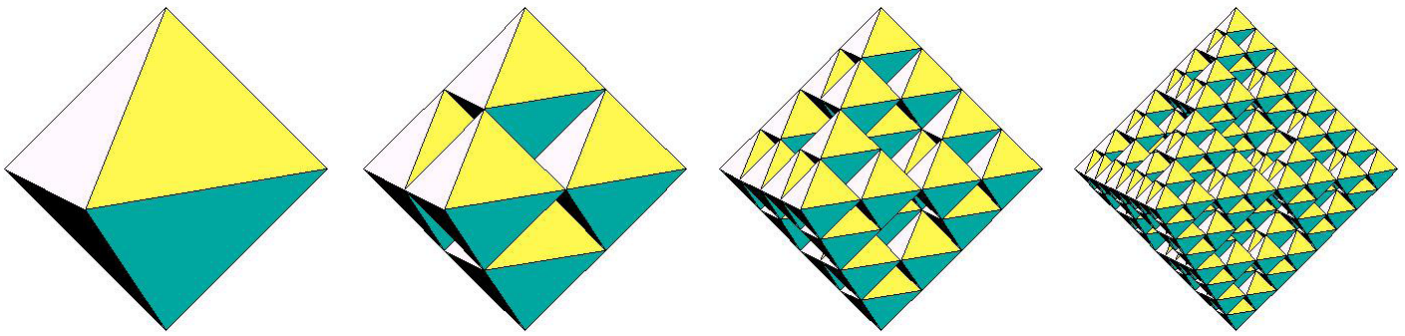


Abb. 10: Oktaeder und die ersten drei Iterationsfiguren zum Oktaederfraktal mit  $f = 0,5$  und  $a = 6$

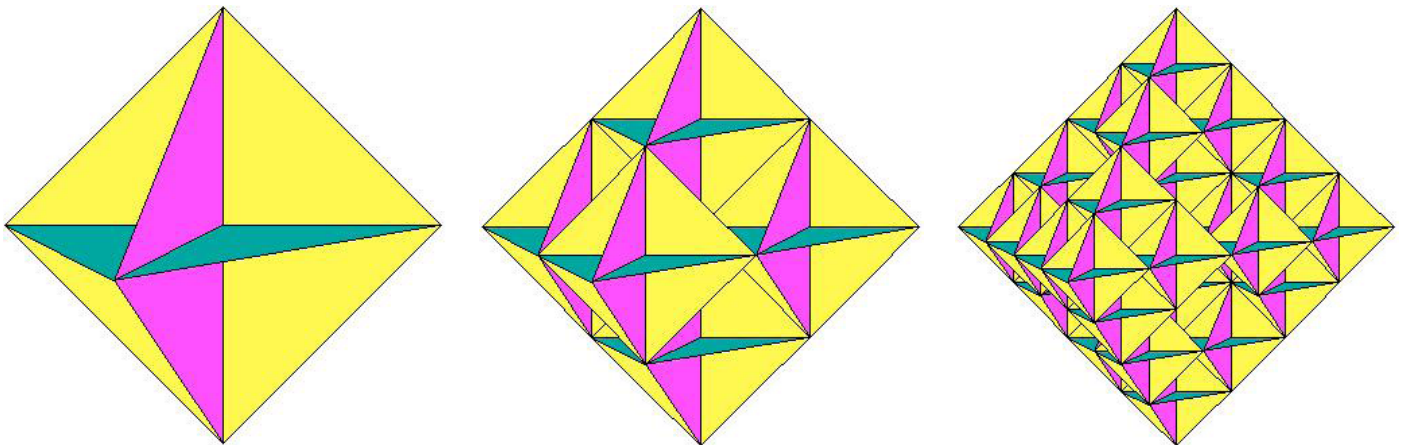


Abb. 11: Das Oktaederfraktal als wachsender „Fächer“ mit Ausgangsfigur und zwei Iterationsstufen

Körper vor. Dagegen ist die Iterationsvorschrift für das Tetraeder leicht verallgemeinerbar: „Lass von dem Tetraeder an jeder Ecke ein halb so großes Tetraeder stehen und entferne den Rest.“

Diese Vorschrift lässt sich offensichtlich sofort auf das Oktaeder übertragen. Für Ikosaeder und Dodekaederfraktal würden sich allerdings die halb so großen Figuren an den Ecken unterscheiden. Also muss man die Größe der verkleinerten Figuren an den Ecken flexibler wählen. Das führt zur endgültigen Iterationsvorschrift: „Lass von einem Polyeder an jeder Ecke möglichst groß je eine Verkleinerung – mit festem Maßstab – in paralleler Lage stehen und entferne den Rest.“

Möglichst groß soll heißen, dass die – gleich großen – verkleinerten Figuren sich gerade berühren, aber nirgends überschneiden. Diese Vorschrift war so einfach, dass ich mich wunderte, dass sie in der Literatur noch nicht zu finden war. Sie führt immer zu einer Lösung, auch bei allen anderen, insbesondere nichtregulären Polyedern. Und es gibt viele Variationsmöglichkeiten, die wie bei Tetraeder und Würfel zu interessanten mathematischen Experimenten führen.

Die genannte Konstruktion führt beim Tetraeder zum Sierpiński-Tetraeder und beim Würfel – nicht zum Mengerschwamm, sondern zum Vollwürfel, da die acht Eckwürfel sich vollständig und lückenlos berühren. Für alle fünf platonischen Körper stellen sich zwangsläufig zwei Fragen:

- Wie berühren sich die verkleinerten Figuren im ersten Iterationsschritt? (Beim Sierpiński-Tetraeder berührten sich die vier kleinen Tetraeder in Punkten. Die verkleinerten Figuren könnten sich auch an Kanten oder auf ganzen Flächen berühren.)
- In welchem Maßstab steht die verkleinerte Figur zur ganzen Figur? (Aus diesem Verkleinerungsfaktor errechnet sich die fraktale Dimension, siehe oben.)

Zahlreiche weitere Fragen sind denkbar, nicht zuletzt durch Abwandlungen der Konstruktionsvorschrift.

### 5.1 Oktaeder

Die beiden Fragen beantworten sich beim Oktaeder von selbst. Anders als beim Tetraeder berühren sich die sechs verkleinerten Oktaeder an ganzen Kanten (Abb. 10). Einen Eckpunkt haben sie sogar alle sechs im Gesamtmittelpunkt der Figur gemeinsam. Als Maßstab bestätigt sich, wie schon oben spontan gesehen,  $2 : 1$ , derselbe wie beim Sierpiński-Tetraeder, so dass auch die Bezeichnung Sierpiński-Oktaeder passt. Damit passen die sechs Oktaeder der ersten Iterationsstufe verblüffend gut zusammen; weggenommen wurden acht Tetraeder.

Die Hauptüberraschung des „Oktaederschwamms“ folgt aber noch: In der zweiten Darstellung (Abb. 11) sieht man inneren (quadratischen) Diagonalfächen der auftretenden Oktaeder. Offensichtlich bleiben diese Flächen in jedem Oktaeder beim Entfernen der nächsten acht Tetraeder vollständig erhalten. Die Iteration der Folge dieser Flächenfiguren ist in dem folgenden Sinne umgekehrt: Statt Schrumpfen durch Entfernen von Volumenelementen hat man Wachsen durch Hinzufügen von Flächen. Dieser wachsende immer feiner werdende Fächer aus Flächen hat dieselbe Grenzfigur wie der immer weiter durchlöchernde schrumpfende Oktaederkörper der vorherigen Iteration.

Damit ist klar, dass die Grenzfigur mindestens ein flächiges Gebilde ist, dass sie also die topologische Dimension 2 hat! Durch diese Eigenschaft unterscheidet sich der Oktaederschwamm stark vom Sierpiński-Tetraeder und vom Mengerschwamm, welche beides Liniennetze sind, Figuren mit der topologischen Dimension 1.

Interessant ist, dass die Oktaeder des Fraktals, bis auf die Lücken ab der zweiten Iterationsstufe, in der gleichen Anordnung aufeinander liegen wie die Kugeln der Keplerpackung. Die Tetraeder im Sierpiński-Tetraeder übrigens auch, nur aus einem anderen Blickwinkel! Das hat sich Christoph zu Nutze gemacht, als er aus Abfall-Plastikkugeln ein Modell des Oktaederschwamms zum Anfassern gebaut hat (Abb. 12).

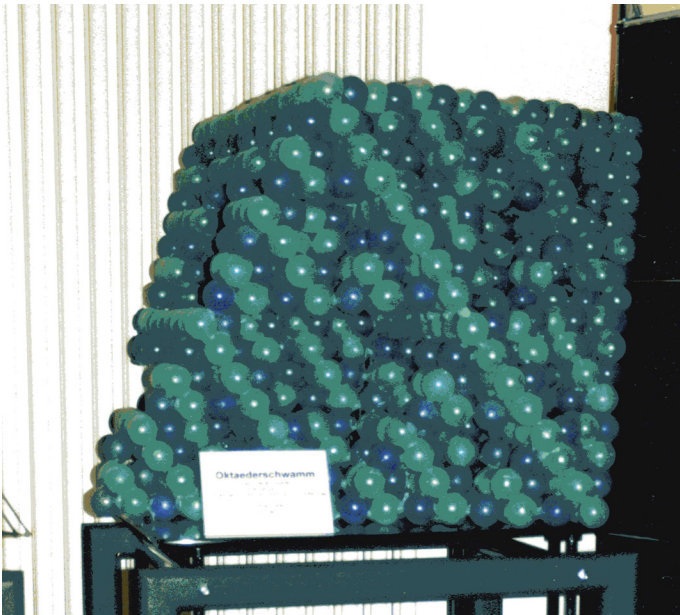


Abb. 12: Oktaederschwamm zum Anfassen, leicht beschädigt, aus Plastikugeln vom Chemiekonzern CWH

### 5.2 Ikosaeder

Die erste Frage ist wieder: Wie stoßen zwei benachbarte Ikosaeder aneinander? Im Abb. 13 oben sieht man zwei kleine Ikosaeder, die nebeneinander in paralleler Lage gemeinsam an einer Kante des Ausgangsikosaeders hängen. Man erkennt im Bild, dass sich die zu AB senkrechten Kanten genau berühren müssen. Wie beim Oktaeder

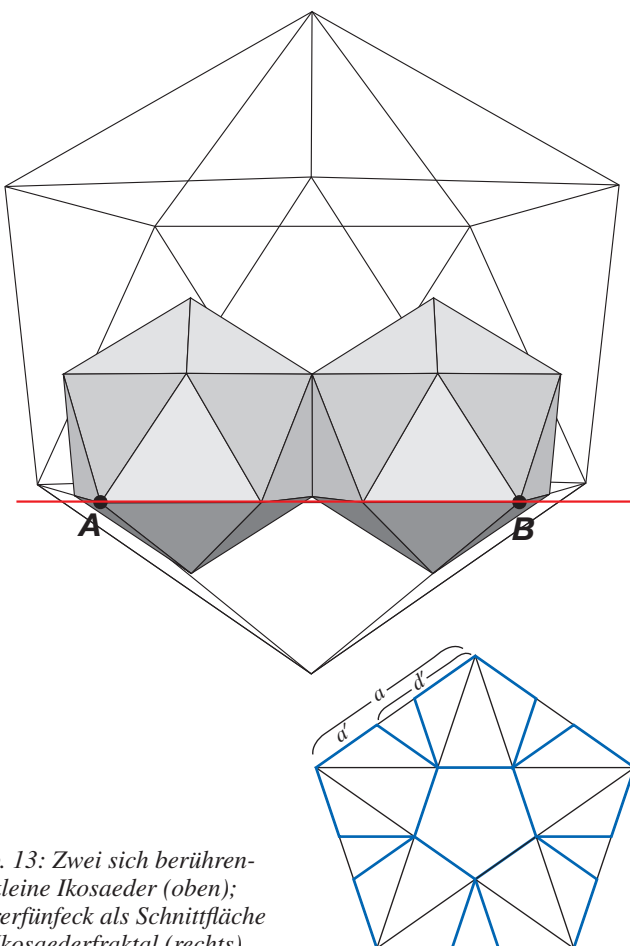


Abb. 13: Zwei sich berührende kleine Ikosaeder (oben); Dürerfünfeck als Schnittfläche im Ikosaederfraktal (rechts)

berühren sich zwei verkleinerte Ikosaeder an einer ganzen Kante. Die 12 Ikosaeder bilden ein neues, interessantes, überraschend kompaktes, in der Literatur nicht bekanntes Kristallcluster. Es besitzt einen von 60 Dreiecken eingeschlossenen Innenraum in Form eines Dodekaeders aus den dreißig Berührkanten, vermindert um 12 (auf jedem Fünfeck) fünfseitige Pyramiden, deren Spitzen nach innen weisen. Im nächsten Iterationsschritt öffnet sich dieser geschlossene Hohlraum allerdings wieder. Die drei Schülerinnen Maike Mevenkamp, Caroline Schenk und Janina Schlenkert, damals Klasse 10 des Gymnasium Canisianum Lüdinghausen, waren dazu bereit, in ca. 40 Arbeitsstunden die ersten beiden Iterationsfiguren aus Papier herzustellen (vermutlich eine Welturaufführung!). Es entstand eine ästhetische Figur, deren Schönheit und Anschaulichkeit durch keine Computergrafik zu ersetzen ist. Die dritte Iterationsstufe wurde auf einem Geometriewochenende unter der Leitung von Christoph Pöppe in München gebaut und hing jahrelang im Mathematikum Gießen. (Beide Abbildungen findet man in [1].)

Wie berechnet man den Verkleinerungsmaßstab? Nach vergeblichen Bemühungen mit Aufstellen zahlreicher Gleichungen und ihrer Verarbeitung mit DERIVE fiel irgendwann der erlösende Blick auf eine besondere Schnittfläche. Wenn man nämlich in der ersten Iterationsstufe an einer Ecke die darunter liegende Kappe aus einem fast vollständigen Ikosaeder und fünf kleinen Kappen abschneidet, erhält man als Schnittfläche die gelegentlich als „Dürerfünfeck“ bekannte Fünfecksfigur (Abb. 13 unten). Man sieht, dass die beiden mit  $a$  und  $a'$  bezeichneten Kantenlängen des großen und des verkleinerten Ikosaeders darin auftreten. Die Berührungspunkte der fünf Fünfecke müssen auf den dünn eingezeichneten Diagonalen des großen Pentagramms liegen. Der gesuchte Maßstab ist  $1 + \varphi$ , wobei  $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618\dots$  die Zahl des Goldenen Schnitts ist. Eine faszinierende Entdeckung! Im harmonischen Verhältnis  $\varphi$  selbst stehen damit auch Kanten- zu Lückenlängen. Vielleicht erklärt diese enge Verbindung zum Goldenen Schnitt auch das ästhetische Aussehen des Ikosaederschwamms. Die Selbstähnlichkeitsdimension ist damit  $\log(12) / \log(2,618\dots) \approx 2,58193\dots$ , nahe der des Oktaederschwamms  $\log(6) / \log(2) \approx 2,58496\dots$ . Die topologische Dimensionen des Ikosaederschwamms ist 1. Als Liniennetz ist er wesentlich von dem topologisch flächenhaften Oktaederschwamm verschieden.

### 5.3 Dodekaeder

Wie beim Ikosaeder und Oktaeder und im Gegensatz zum Tetraeder berühren sich zwei Kanten der verkleinerten Eck-Dodekaeder an einer ganzen Kante. Diese Berührkante liegt orthogonal zur darüber liegenden Kante des größeren Dodekaeders der vorherigen Iterationsstufe (Abb. 14). Alle 20 Eck-Dodekaeder zusammen ergeben eine ästhetische Figur, luftiger und lichter als beim Ikosaeder (Abb.15, weitere Abbildungen in [1]).

Die Suche nach dem Verkleinerungsmaßstab war wieder mühsam, auch wenn hinterher alles sehr einfach aussieht! Als Belohnung stellen sich für Schüler schöne Geometrieaufgaben heraus. Rechnungen mit Monsterformeln mit CAS und Derive waren unbefriedigend, was nicht gegen den Rechneinsatz sprechen soll, allenfalls für eine intensivere Ausbildung der Lehrer im Umgang damit. Wieder brachte die elementare Geometrie eine (Er-)Lösung. Ich richtete den Blick auf eine besondere Fläche der Figur, statt einer Schnittfläche im Innern diesmal eine Außenfläche der ersten Iterationsstufe (Abb. 14). Die fünf kleinen Fünfecke in einem großen Fünfeck bilden eine dem Dürerfünfeck ähnliche Pentagrammfigur mit kleineren Fünfecken in den Ecken in paralleler Lage. Hier fand ich den Schlüssel: Ich suchte nach auffallenden Eigenschaften (besondere Linien und Symmetrie) und wurde fündig! Ähnlich wie beim Dürerfünfeck betrachtete ich die Kantenverlängerungen der kleinen Fünfecke ins Innere des großen Fünfecks. Sie scheinen aufeinander zu fallen, so dass die 10 Linien nur 5 Geraden bilden, die sich im Hauptmittelpunkt der Figur schneiden. Noch war das eine

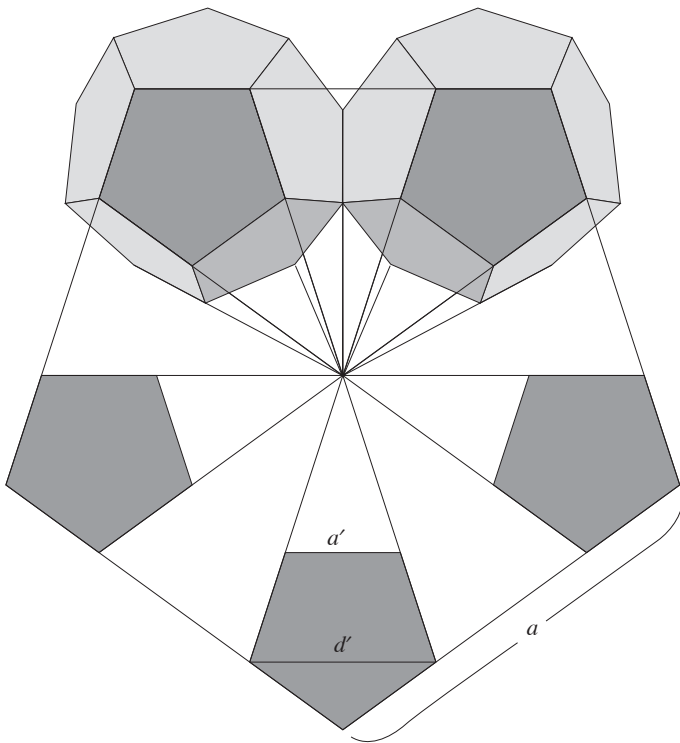


Abb. 14: Zwei sich berührende kleine Dodekaeder ergänzen sich mit drei weiteren zu einer Variante des Dürerfünfecks; dieses wird Außenfläche zum Dodekaederfraktal.

unbewiesene Beobachtung, das konnte aber kein Zufall sein. Diese offene Situation ist eine gute Gelegenheit, den Schülern die Notwendigkeit eines mathematischen Beweises nahe zu bringen. Man ist auf sich allein gestellt. Schließlich gab es keine Literatur, in der man die mathematische Richtigkeit dieser anscheinend offensichtlichen „empirischen Wahrnehmung“ kontrollieren könnte. Zum anderen kann man als Lehrer in dieser offenen Situation nachempfinden, wie Schülern zumute ist, wenn sie eine von uns gestellte Aufgabe nicht rauskriegen.

Der Beweis, dass sich diese 10 Verlängerungen als 5 Geraden im Mittelpunkt schneiden, sei in drei Schritte unterteilt (Abb.14):

1. Schritt: Man verlängert in Gedanken an einer Seitenfläche eines kleinen Dodekaeders die fünf an den Ecken anstoßenden nicht an der Fläche liegenden Körperkanten. Die Verlängerungen treffen sich wegen der Symmetrie des platonischen Körpers in einem Punkt und bilden eine Pyramide. Sie besteht übrigens aus goldenen Dreiecken, und alle 12 dieser fünfseitigen Pyramiden bilden den bekannten Keplerstern, einen sternförmigen fastarchimedischen Körper.

2. Schritt: Liegen zwei Dodekaeder an einer Berührkante aneinander, so bildet diese auch eine gemeinsame Kante der auf den zwei Seitenflächen sitzenden kongruenten Kepler-Pyramiden, die dann eine gemeinsame Spitze haben müssen.

3. Schritt: Liegen fünf Dodekaeder wie in unserer Konstruktion so, dass sie sich an den Kanten berühren, so hat jede Pyramide ihre Spitze mit der Nachbarpyramide gemeinsam, also treffen sich alle oben liegenden Geraden in einer gemeinsamen Spitze der fünf Pyramiden. Wegen der parallelen Lage der Fünfecke müssen immer zwei der zehn Geraden parallel sein und, da sie durch einen Punkt gehen, auch aufeinander fallen.

Nachdem diese sehr regelmäßige, mit dem Pentagramm verwandte Figur zum Vorschein gekommen war, konnte das Verhältnis  $a : a'$  leicht berechnet werden. Schnell wurde deutlich, dass diese

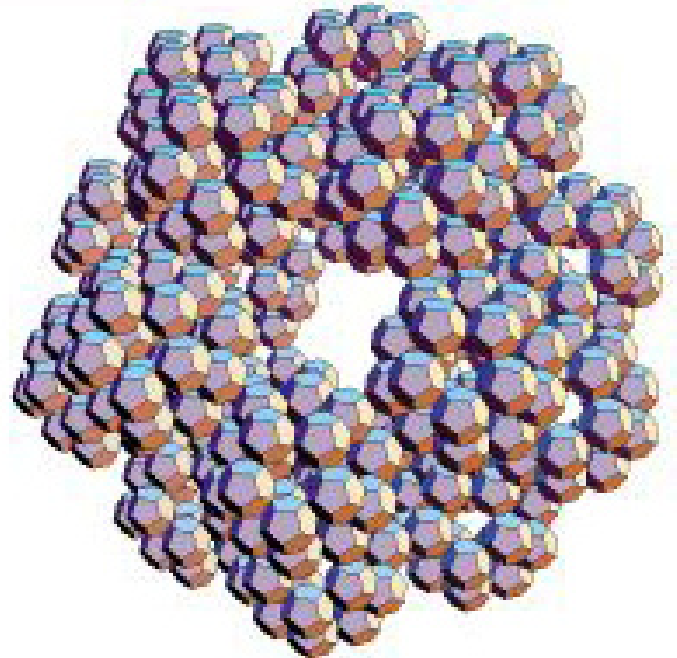
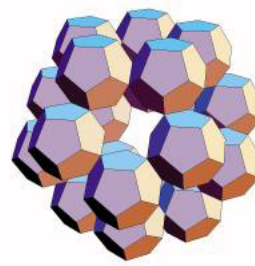


Abb. 15: Zwei Iterationsstufen des Dodekaederschwamms.

Figur voller Symmetrien steckt (Abb. 14). In die Lücken zwischen den Fünfecken passen punktsymmetrisch zum Gegenüber wieder Fünfecke. In der Figur kommen nur zwei Längen vor, nämlich Kantenlänge  $a'$  und Diagonalenlänge  $d'$  der verkleinerten Fünfecke, und alle anderen setzen sich daraus zusammen. Wieder ergeben sich faszinierend schöne Proportionen: Das Verhältnis von Lücke zur neuen Kante ist harmonisch, also gleich  $\phi$ , der Zahl des Goldenen Schnitts. Beim Icosaederfraktal war umgekehrt das Verhältnis der neuen Kante zur Lücke harmonisch. Ist das wieder ein Grund für die augenfällige Schönheit der Figur?

Als Hausdorff-Dimension ergibt sich der etwas kleinere Wert  $\log(12) / \log(3,618...) \approx 2,32962...$ . Die topologische Dimension ist wiederum 1, der Dodekaederschwamm ist topologisch ein Liniennetz.

## 6. Schluss

Was hat die Schüler getrieben, aus freien Stücken so viel Zeit zu investieren, was hat sie trotzdem dabei so zufrieden gemacht?

Die sinnliche Dimension zum einen beim Anschauen, Anfassen, die Zufriedenheit, selber eigenhändig etwas hergestellt zu haben. Das Gefühl, etwas Neues zu schaffen. Aber auch eine Neugier, historische Quellen zu studieren. Es gab natürlich auch die problemabhängige Neugier, den Drang ein Problem, eine Knobelaufgabe lösen zu wollen.

Die Quelle der Ideen zu all diesen Aktivitäten war die Mathematik. Neben vielen notwendigen Methodenerneuerungen ist immer wieder auch die Pflege einer emotionalen Beziehung zur Mathematik unersetzlich.

## Literaturhinweise

- [1] C. Pöppe: Monumentalgeometrie aus Karton. <http://www.wissenschaftschulen.de/artikel/1010070>
- [2] H. Zeitler, D. Pagon: Fraktale Geometrie – eine Einführung. Vieweg,



Braunschweig/Wiesbaden 2000

- [3] B. B. Mandelbrot: Die fraktale Geometrie der Natur. Sonderausgabe, Birkhäuser, Basel 1991
- [4] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Bausteine des Chaos: Fraktale. Springer, Berlin, und Klett-Cotta, Stuttgart 1991
- [5] Manfred Geier: Der Wiener Kreis. Rowohlt, Reinbek 1992
- [6] K. J. Falconer: Fraktale Geometrie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1993
- [7] J. Dufner, A. Rosner, F. Unsel: Fraktale und Juliamengen, Harri Deutsch, Frankfurt 1988
- [8] K. Menger: Dimensionstheorie. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928
- [9] H.-W. Henn: Das Schneeflockenland und andere Fraktale. Der Mathematikunterricht, 1989, H. 5, S. 43 – 61
- [10] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, L. Yunker: Fraktale: Selbstähnlichkeit, Chaosspiel, Dimension; ein Arbeitsbuch. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1992
- [11] Wilhelm Sternemann: Mathe-Fenster. <http://mathe-fenster.de>