Die koorbitalen Saturn-Monde 1980 S1 und 1980 S3

von Gottfried Groschopf

Über schulische Themen wurde in SuW schon immer berichtet. Es ist nun sehr zu begrüßen, daß eine eigene Spalte „Astronomie in der Schule" eingerichtet wurde, in der ein regelmäßiger Gedankenaustausch der Lehrer stattfinden kann. Hoffentlich wird von der Möglichkeit, Aufsätze pädagogischen Inhalts zu veröffentlichen, reicher Gebrauch gemacht!

In den letzten SuW-Heften brachte „Astronomie in der Schule" einige Artikel von Thomas Schmidt. Diese sind wesentlich geprägt durch die Tatsache, daß der Autor an einer Waldorfschule unterrichtet. Mit den in diesen Artikeln angeschnittenen Problemen sollte sich jeder Lehrer auseinandersetzen, ganz gleichgültig, wie er sich in weltanschaulicher Hinsicht zur Waldorf-Pädagogik stellt.

Im folgenden Aufsatz wird ein kleines astronomisches Problem vorgetragen, auf das ich bei der Lektüre von Voyager-Berichten gestoßen bin. Dabei wird versucht, möglichst geringe physikalische Kenntnisse vorauszusetzen, denn die Schüler von Astronomie-Grundkursen verfügen häufig über ein recht bescheidenes physikalisches Wissen. Wenn irgend möglich, wurde versucht, physikalische Fakten plausibel zu machen. In diesem Sinne ist es zu verstehen, daß Dinge ausführlich dargelegt werden, die den meisten Lesern bekannt sind oder die mit wenig Rechnung mühelos abzuhandeln wären.

Die Monde 1980 S 1 und 1980 S 3 umlaufen den Saturn auf Bahnen, die fast zusammenfallen. Der Abstand der Bahnen beträgt nur 50 km; er ist so klein, daß die Monde nicht aneinander vorbeikommen können, ohne zusammenzustoßen (s. Abb. 1). Der Mond 1980 S 1 (er wird manchmal auch S 10 genannt, jedoch ist diese Bezeichnung noch nicht endgültig anerkannt) eilt seinem Partner auf der inneren Bahn voraus. Sein Bahnradius ist $a_1 = 151\,400$ km, seine Größe 220 km × 200 km × 160 km; er hat eine Kartoffelform. Der Mond 1980 S 3 (später vielleicht S 11 genannt) läuft auf der äußeren Bahn hinterher. Sein Bahnradius ist $a_3 = 151\,450$ km, seine Größe 140 km × 120 km × 100 km; seine Gestalt ist unregelmäßig. Eine kleine Abweichung der Bahnen von der Kreisform soll im folgenden nicht berücksichtigt werden.

Bevor wir das Verhalten dieser beiden Monde genauer untersuchen können, müssen wir einige physikalische Grundlagen klären. Dazu beginnen wir mit der Frage: *Was wird schneller, wenn man es bremst, was wird langsamer, wenn man ihm Energie zuführt?* Antwort: Ein Planet, ein Mond, ein Satellit oder ein Elektron!

Planeten, Monde und Satelliten bewegen sich unter dem Einfluß des Newtonschen Gravitationsgesetzes (Newton 1687) um einen Zentralkörper. Nach diesem Gesetz ist die Gravitations- oder Massenanziehungskraft proportional zu $1/r^2$ (r Entfernung Zentralkörper–Satellit), d.h. die Kraft sinkt bei doppelter Entfernung auf den 4. Teil, bei 3facher Entfernung auf den 9. Teil usf.

Ein Elektron, das um einen Atomkern umläuft, bewegt sich unter dem Einfluß des Coulombschen Gesetzes (Coulomb 1785) für die elektrische Anziehungskraft. Auch diese Kraft ist proportional zu $1/r^2$.

Bewegungen mit einem $1/r^2$-Kraftgesetz nennt man Kepler-Bewegungen, weil Johannes Kepler (1571 ... 1630) sie erstmals bei Planeten entdeckte. Newton fand später, daß als Bahnformen von Kepler-Bewegungen Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln (allgemein: Kegelschnitte) auftreten können (Abb. 2).

Wir betrachten im folgenden Bewegungen auf Kreisbahnen und wählen als Beispiel die Bewegung von Erdsatelliten. Damit ein Satellit in einer Kreisbahn um seinen Zentralkörper umlaufen kann, muß er eine ganz bestimmte Bahngeschwindigkeit haben. Wir berechnen diese Kreisbahngeschwindigkeit v_k für einen Satelliten, der 30 km über der Erdoberfläche umläuft. Seine Entfernung vom Erdmittelpunkt beträgt dann $r = 6370\text{ km} + 30\text{ km} = 6400\text{ km}$.

Wenn keine Erdanziehungskraft da wäre, würde sich der Satellit in einer kleinen Zeitspanne Δt von A aus (s. Abb. 3) geradlinig und gleichförmig in Richtung der Tangente um das Stück $s_1 = v_k \cdot \Delta t$ bis B bewegen. Ohne Bahngeschwindigkeit, nur unter dem Einfluß der Erdanziehungskraft, würde der Satellit von B aus um das Stück $s_2 = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$ nach C fallen ($g \approx 10$ m/s^2 ist die Fallbeschleunigung). In Wirklichkeit führt der Satellit beide Bewegungen gleichzeitig aus. Die Geschwin-

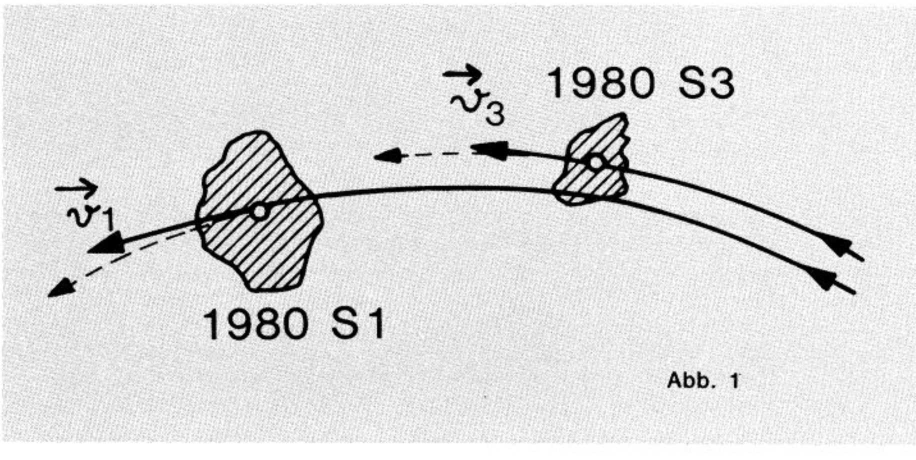

Abb. 1

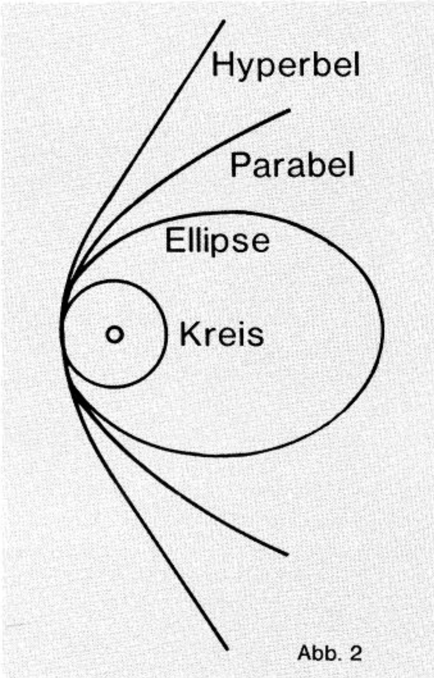

Abb. 2

digkeit v_k muß nun gerade so groß sein, daß C ein Punkt der Kreisbahn des Satelliten ist. Damit ergibt sich als Bedingung für v_k

$$\overline{MB} = \sqrt{r^2 + (v_k \Delta t)^2} = r + \tfrac{1}{2} g (\Delta t)^2,$$

quadriert

$$r^2 + (v_k \Delta t)^2 = r^2 + rg(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{4} g^2 (\Delta t)^4$$

oder

$$v_k = \sqrt{rg + \tfrac{1}{4} g^2 (\Delta t)^2}.$$

Da $r \gg g(\Delta t)^2$ ist, kann man das zweite Glied unter der Wurzel vernachlässigen und erhält

$$v_k \approx \sqrt{rg}$$
$$= \sqrt{6400 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 8 \text{ km/s}.$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit v_k ist abhängig von der Entfernung des Satelliten vom Erdmittelpunkt. Bei doppelter Entfernung $r_2 = 2r_1$ würde v_k um den Faktor $\sqrt{2}$ auf $v_{k2} = \sqrt{2}\, v_{k1}$ anwachsen, wenn nicht auch g von dieser Entfernung abhängen würde. g nimmt, genau wie die Erdanziehungskraft bei doppelter Entfernung auf den vierten Teil ab, also $g_2 = \frac{1}{4} g_1$, so daß v_k um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ abnimmt: $v_{k2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{k1} \approx 0{,}7 v_{k1}$. Bei der vierfachen Entfernung ist die Kreisbahngeschwindigkeit nur noch halb so groß.

Wenn die Bahngeschwindigkeit des Satelliten in A (Abb. 3) größer ist als die Kreisbahngeschwindigkeit v_k, so bewegt er sich auf einer Ellipse, die sich auf der Gegenseite weit von der Kreisbahn entfernt (s. Bahn 1 und 2 in Abb. 4). Ist die Bahngeschwindigkeit kleiner als v_k, so fällt der Satellit auf einem kurzen Ellipsenbogen zur Erde zurück (Abb. 4, Bahn 3).

Wenn nun ein Satellit, z. B. durch Reibung an der Luft, gebremst wird, sollte man meinen, daß er langsamer wird. Dann müßte er aber eine weiter außen liegende Kreisbahn einnehmen. Um auf eine weiter außen liegende Bahn zu gelangen, würde er Energie benötigen; es wird ihm aber keine Energie zugeführt, sondern Energie weggenommen. Infolge der Reibung muß er also nach innen gehen. Für eine weiter innen liegende Bahn braucht er jedoch eine größere Geschwindigkeit. Um diese zu erreichen, braucht er zusätzliche Bewegungsenergie. Woher bekommt er diese?

Eine außen liegende Bahn hat mehr Energie (Lageenergie oder potentielle Energie) als eine weiter innen liegende, genau so wie das Wasser in einem Stausee, der weiter vom Erdmittelpunkt entfernt ist, mehr Energie hat als das Wasser, das unten – näher am Erdmittelpunkt – aus der Turbine ausfließt. Die Energiedifferenz zwischen den beiden Satellitenbahnen wird nun beim Übergang von außen nach innen zur einen Hälfte in Reibungsarbeit, zur anderen Hälfte in Bewegungsenergie umgesetzt. Das Bremsen hat also zwei Dinge bewirkt: Entstehung von Reibungsarbeit und größere Geschwindigkeit.

Entsprechend ist es im elektrischen Fall: Wenn ein Elektron in einem Atom von einer höheren, energiereicheren Bahn auf eine weiter innen liegende, energieärmere Bahn springt, wird die Hälfte der Energiedifferenz zwischen den beiden Bahnen zur Beschleunigung des Elektrons gebraucht; die andere Hälfte liefert die Energie für das beim Übergang abgestrahlte Lichtquant.

Betrachten wir nun einen Satelliten, der von einer inneren auf eine äußere Kreisbahn hochgehoben werden soll, so muß ihm Energie zugeführt werden. Aber gleichzeitig stellt der Satellit selbst einen Teil seiner Bewegungsenergie zur Verfügung, so daß man ihm nur die Hälfte des Energieunterschiedes der beiden Kreisbahnen zuführen muß.

So kommt es, daß ein Satellit beim Bremsen auf eine weiter innen liegende Bahn kommt und dort schneller wird als vorher, und daß er, wenn man ihm Energie zuführt, auf eine weiter außen liegende Bahn steigt, auf der er langsamer läuft.

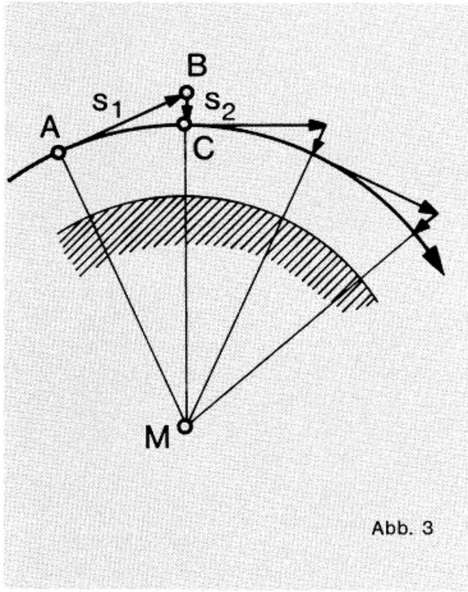

Abb. 3

Wie kann man einen solchen Übergang, z. B. von einer innen liegenden auf eine weiter außen liegende kreisförmige Satellitenbahn in der Praxis ausführen? Man führt dem Satelliten zunächst einmal soviel Energie zu und erhöht damit seine Geschwindigkeit, daß er sich auf einer Ellipse bewegt, deren Gegenpunkt gerade die gewünschte Entfernung von der Erde hat, so etwa wie es die Bahn 2 in Abb. 4 darstellt. Würde man nach Erreichen dieses Punktes nichts unternehmen, so würde der Satellit auf der zweiten Hälfte seiner Bahnellipse zum Ausgangspunkt zurückkehren. Man muß ihm also im Gegenpunkt noch einmal Energie zuführen und zwar gerade soviel, daß er die Kreisbahngeschwindigkeit der äußeren Bahn erreicht. Bahnen, die aus einer Kreisbahn, einer halben Ellipse und dann wieder einer Kreisbahn bestehen, nennt man Hohmann-Bahnen.

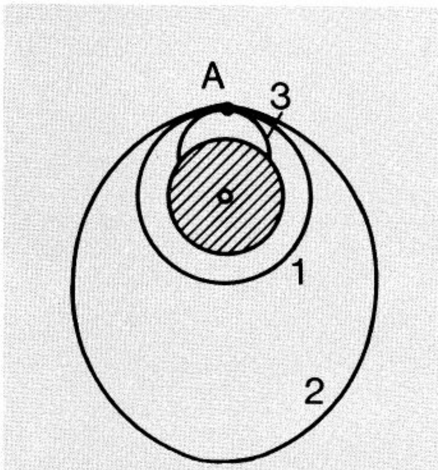

Abb. 4

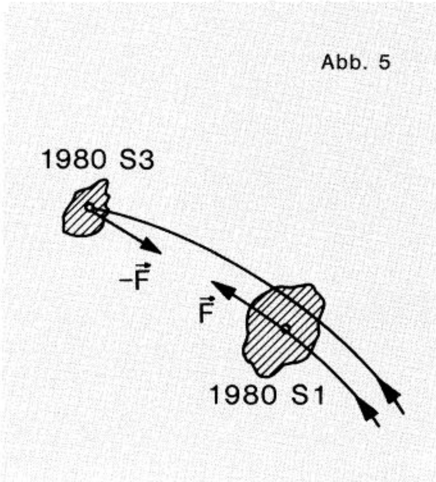

Abb. 5

Wir kehren zurück zu den Saturn-Monden 1980 S 1 und 1980 S 3. Welche Umlaufsdauern haben die beiden? In Tabellen findet man diese Angabe nicht oder nicht mit ausreichender Genauigkeit. Man kann sie aber nach dem 3. Keplerschen Gesetz ausrechnen, wenn man Bahnradius und Umlaufdauer für einen beliebigen Saturn-Mond kennt. Das 3. Keplersche Gesetz besagt nämlich, daß für alle Satelliten eines bestimmten Zentralkörpers die Größe T^2/a^3 eine Konstante k ist (T = Umlaufsdauer, a = große Halbachse einer elliptischen Bahn, in unserem Fall Bahnradius).

Für den Saturn-Mond Mimas gilt:

Bahnradius $a_M = 185\,600$ km;

Umlaufsdauer $T_M = 0{,}9424$ d.

Daraus errechnet sich die Konstante des Saturnsystems

$$k = T_M^2/a_M^3 = 1.389\,11 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{d}^2/\mathrm{km}^3.$$

Nun ergeben sich die Umlaufsdauern der Monde aus

$T^2/a^3 = k$ oder $T = \sqrt{k \cdot a^3}$ zu

$T_1 = 0{,}694\,32$ d und $T_3 = 0{,}694\,66$ d.

Das sind etwa 16 h 40 min. Der Unterschied der beiden Umlaufsdauern beträgt nur eine halbe Minute!

Nun können wir die Bahngeschwindigkeiten der beiden Monde berechnen. Die Geschwindigkeit v ist gleich dem Bahnumfang $2\pi a$, geteilt durch die Umlaufsdauer T. Man erhält

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1} = 15{,}8575\ \mathrm{km/s};$$

$$v_3 = \frac{2\pi a_3}{T_3} = 15{,}8549\ \mathrm{km/s}.$$

Die Geschwindigkeit des inneren Mondes ist tatsächlich größer als die des äußeren. Der Geschwindigkeitsunterschied ist jedoch nur 2,6 m/s (≈ 10 km/h, etwa ein Joggingtempo).

Wenn die beiden Monde im Augenblick so stehen, wie es in Abb. 1 dargestellt ist, so entfernen sie sich im Laufe der Zeit immer mehr voneinander, weil 1980 S 3 auf der längeren Außenbahn langsamer läuft als 1980 S 1 auf der kürzeren Innenbahn. Sie entfernen sich aber nur so weit voneinander, bis der halbe Bahnumfang zwischen ihnen liegt. Danach nähern sie sich einander wieder; dann läuft der schnellere Mond 1980 S 1 dem langsameren Mond 1980 S 3 hinterher und versucht ihn einzuholen.

Wann werden die beiden sich wieder treffen? Das errechnet man aus der Gleichung für die synodische Umlaufsdauer T_{syn}:

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}.$$

Das ist dieselbe Gleichung, mit der man die synodische Umlaufsdauer von Planeten oder Monden berechnen kann oder mit der man ausrechnen kann, wo auf dem Zifferblatt einer Uhr die Zeiger sich erstmals wieder treffen, nachdem sie um 12 Uhr übereinander gestanden waren (das muß kurz nach 1 Uhr sein; rechnen Sie es selbst einmal genau aus!).

Setzen wir unsere Werte in die obige Gleichung ein, so finden wir, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Begegnungen der Monde die Zeit $T_{syn} = 1402{,}2\ \mathrm{d} = 3{,}8\ \mathrm{a}$ verstreicht. Während dieser Zeit von fast 4 Jahren haben die Monde etwas mehr als 2000 Umläufe um den Saturn gemacht, und zwar der innere genau einen Umlauf mehr als der äußere.

Und was passiert dann? Werden sie zusammenstoßen?! Kurz vor der Begegnung sieht die Sache so aus wie in Abb. 5. Zwischen den beiden Monden wirkt die Gravitationskraft. Auf den Mond 1980 S 1 wirkt die Kraft $\vec{F}$ beschleunigend. Dadurch wird er auf eine weiter außen liegende Bahn angehoben, auf der er dann langsamer läuft. Warum das so ist, wurde oben erläutert. Auf den Mond 1980 S 3 wirkt die gleich große und entgegengesetzte Kraft $-\vec{F}$ bremsend; er geht deshalb nach innen und wird schneller. Das wird in Abb. 6 gezeigt.

Und nun löst sich das Problem, wie zwei Monde, bei denen die halbe Summe der kleinsten Abmessungen 130 km beträgt, auf Bahnen aneinander vorbeikommen können, die nur 50 km voneinander entfernt liegen, ganz von selbst: Sie brauchen gar nicht aneinander vorbei zu kommen. Bevor der schnellere 1980 S 1 den langsameren 1980 S 3 überholen kann, geht 1980 S 1 nach außen und wird dort langsamer, während 1980 S 3 nach innen geht und dort schneller wird.

Nun entfernen sich die beiden wieder voneinander. Nach etwa 1000 Umläufen um den Saturn liegt der halbe Bahnumfang zwischen ihnen und der vorauseilende 1980 S 3 wird zum hinterdreinlaufenden.

Da der Mond 1980 S 1 wesentlich schwerer ist als 1980 S 3, erhebt er sich nur wenig über seine vorherige Bahn, während 1980 S 3 so weit absteigt, daß er 50 km unter der Bahn von 1980 S 1 umläuft.

*

Beim nächsten Treffen, 4 Jahre später, ist 1980 S 3 der schnellere, der 1980 S 1 fast einholt. Jetzt wird 1980 S 1 gebremst und 1980 S 3 beschleunigt und die Monde wechseln wieder Außenbahn und Innenbahn. Danach ist der Zustand von Abb. 1 wieder erreicht. Und so fort!

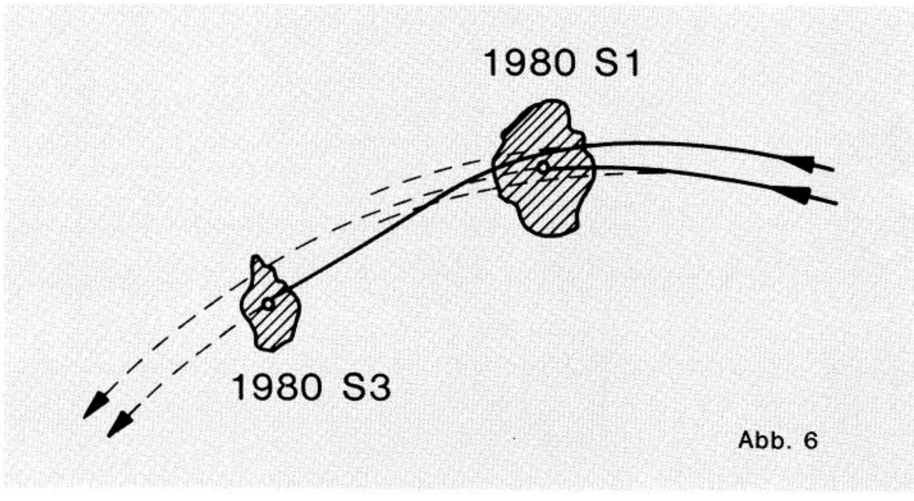

Abb. 6