Radioteleskope – Konstruktionen mit dem „Parabel-Gen“

Olaf Fischer

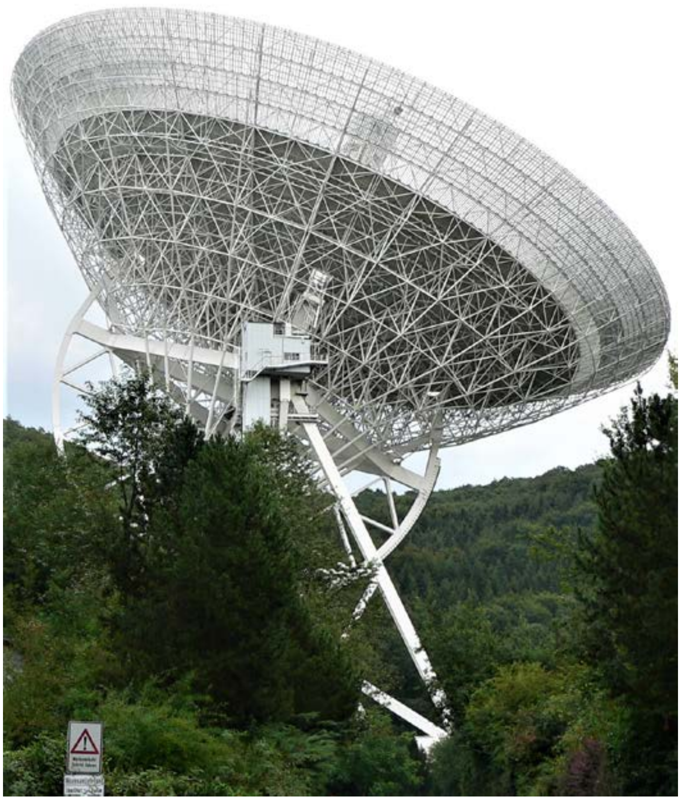


Abbildung 1: Das 100-m-Radioteleskop bei Bonn. ©: Von Hans-Peter Scholz Ulenspiegel - contributed by the author, CC BY-SA 2.0 de, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=281876, (Bildausschnitt).

Radioteleskope haben große Durchmesser, damit man schwache Signale empfangen und diese in kleinen Winkelabständen voneinander trennen kann. Entsprechend handelt es sich um imposante Konstruktionen mit einer gewaltigen Masse. So z. B. hat das Radioteleskop Effelsberg (bei Bonn, siehe Abb. 1) eine Masse von 3200 t. Wird das Teleskop bewegt, so bewirkt das Eigengewicht eine Verformung der Schüssel (so nennen Radioastronomen auch den Hohlspiegel).

Die Schüssel eines Radioteleskops muss die Form eines Rotationsparaboloids haben. Zum einen hat es dann den gleichen Brennpunkt für achsnah und achsfern einfallende Strahlen (im Gegensatz zum sphärisch geformten Reflektor). Zum anderen gewährleistet nur der Rotationsparaboloid, dass alle einfallenden Strahlen in gleicher Phase am Brennpunkt ankommen, was für die Interferometrie wichtig ist.

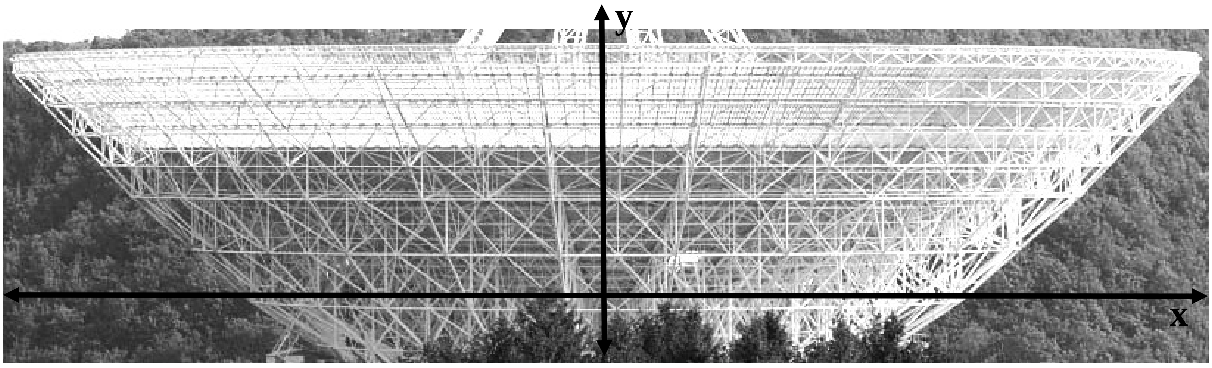
Als Teleskopingenieur steht man vor der großen Herausforderung, die Verformung infolge Eigengewicht so zu lenken, dass stets nur Rotationsparaboloide entstehen (wenn auch mit anderer Brennweite und Achslage). Das Konstruktionsprinzip hat man Homologie genannt. Dieser Begriff findet schon in anderen Wissenschaften Verwendung. So versteht man in der Biologie unter Homologie die grundsätzliche Übereinstimmung bestimmter Merkmale (z. B. Gliedmaßen der Wirbeltiere: Fledermaus, Molch, Pferd), die auf gleiche Herkunft hinweisen. In der Chemie kennt man die homologe Reihe – eine Reihe von Verbindungen, die sich durch eine gemeinsame allgemeine Summenformel darstellen lassen (z. B. Alkane: C_nH_{2n+2}).

Die WIS-Materialien laden die Schüler dazu ein, sich mit der Parabel bzw. dem Rotationsparaboloid beim Bonner 100-m-Radioteleskop theoretisch und praktisch auseinanderzusetzen, wobei die Tätigkeit des **Konstruierens** eine wichtige Rolle spielt. Außerdem werden einige im **SuW-Beitrag (3/2011, S. 42-52)** vorgestellte ingenieurtechnische Überlegungen für Schüler nachvollziehbar aufbereitet. Schließlich wird der Begriff ‚Homologie’ vertieft.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Astropraxis, Astronomiegeschichte	Radioteleskope
Physik	Optik, Mechanik	Hohlspiegel, Brennweite, Phase, Kraftvektor, Kräfteparallelogramm
Fächer-verknüpfung	Astro-Ma, Astro-Bio, Astro-Ch, Astro-Technik	Parabel, Rotationsparaboloid, Bogenlänge, Kurvenintegral, Mantelfläche von Kegelstumpf, homologe Reihe, Homologie, Konstruktion, Biegebalken, Versteifung
Lehre allgemein	Kompetenzen (Bewertung, Wissen und Erkenntnis), Unterrichtsmittel	Lückentext, Lesekompetenz, Bilder auswerten, Berechnungen, Arbeitsblatt, Schnittbogen, Papiermodell, Freihandexperiment, Messen

(→zurück zum Anfang)

ARBEITSBLATT
„Die Parabel beim Radioteleskop“



Das Bild zeigt eine Seitenansicht der parabolisch geformten Reflektorschüssel (eine Art Hohlspiegel) des Radioteleskops Effelsberg (bei Bonn). Sie ist eingehüllt durch eine, die homologe Verformung garantierende Tragekonstruktion. Bei genauem Hinsehen kannst Du die parabelförmige Reflektorschüssel durch das Tragegerüst hindurch erkennen.

Aufgaben

1. Zeichne im obigen Bild die **Parabel**, die die Reflektorschüssel formt, nach.

2. Die Reflektorschüssel (der **Rotationsparaboloid**) hat einen Durchmesser von 100 m. Bestimme durch Ausmessen der Aufnahme die Tiefe der Schüssel, d. h. den y-Wert für x = 50 m.

3. Beschreibe die **Parabel** nun durch eine Funktionsgleichung.

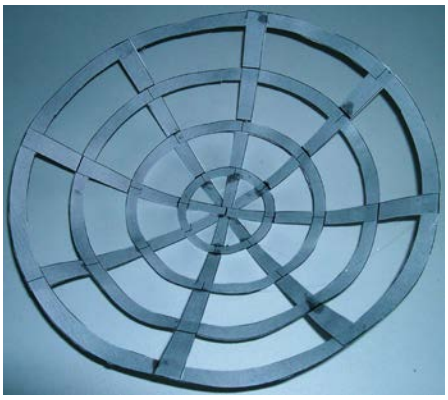
4. Bestimme schließlich den Ort des Primärfokus (die **Brennweite**) und zeichne ihn ins obige Bild ein.

Seitenansicht der Teleskopschüssel. ©: Tenderlok - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, Bild https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39824462, Bild wurde beschnitten.

(→zurück zum Anfang)

BAUANLEITUNG
Radioteleskopschüssel im Modell

Fertige ein Papiermodell von der Reflektorschüssel des Radioteleskops Effelsberg aus dem vorliegenden **Schnittbogen**. Die Teile (4 Kreisringe und 4 **Parabelstreifen**) sind auszuschneiden und an den markierten Stellen miteinander zu verbinden.



Dir soll aber auch klarwerden, wie der Ausschnittbogen zustande kam. Dazu kannst Du Deine mathematischen Kenntnisse zur Parabel, zum **Rotationsparaboloid** und zum **Integrieren** wachrufen und nutzen.

Aufgaben

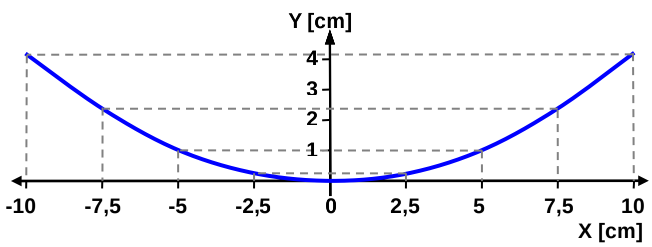
1. Der **Maßstab** wurde so gewählt, dass der Schüsseldurchmesser (100 m) im Modell einen Durchmesser von 20 cm besitzt und somit auf einen A4-Bogen passt. Nenne die Maßstabsangabe.

2. Zur **Konstruktion** der Papiermodellteile ist die Funktionsgleichung für die **Parabel** (Rotationsparabel), welche die Querschnittslinie der Teleskopschüssel beschreibt, nötig. Diese hat für die Originalgröße folgende Gestalt:

$$y = f(x) = \frac{1}{120\,\text{m}} \cdot x^2.$$

Wie sieht sie für das Modell aus?

3. Das nebenstehende Bild zeigt den Graphen der Rotationsparabel als Konstruktionsgrundlage. Die Radien der Außenränder der Kreisringe wurden wie dargestellt in Schritten von 2,5 cm gewählt. Die Länge der Parabelstreifen und die Abstände der Verbindungspunkte (also die entsprechenden **Bogenlängen**) müssen mit Hilfe eines **Kurvenintegrals** berechnet werden.



Die Bogenlänge s des Graphen einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ im Intervall $a \le x \le b$ erhält man aus dem Kurvenintegral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f(x)'\right)^2}\, dx.$$

Schreibe das **Kurvenintegral** zur Bestimmung der Bogenlänge des Parabelarms vom Scheitelpunkt bis zum Schüsselrand (im Modell) auf!

[(→zurück zum Anfang)]

Zusatzaufgabe 1

Zur Ausführung des aufgeschriebenen (skalaren) **Kurvenintegrals** kann man auf eine Tabelle mit unbestimmten Integralen zurückgreifen, wie man sie in verschiedenen Taschenbüchern zur Mathematik (z. B. von Bronstein und Semendjajew, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981, S. 102) vorfindet.

$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\; \mathrm{d}x$ sieht bei $a > 0$ und $(4ac - b^2) > 0$ wie folgt aus:

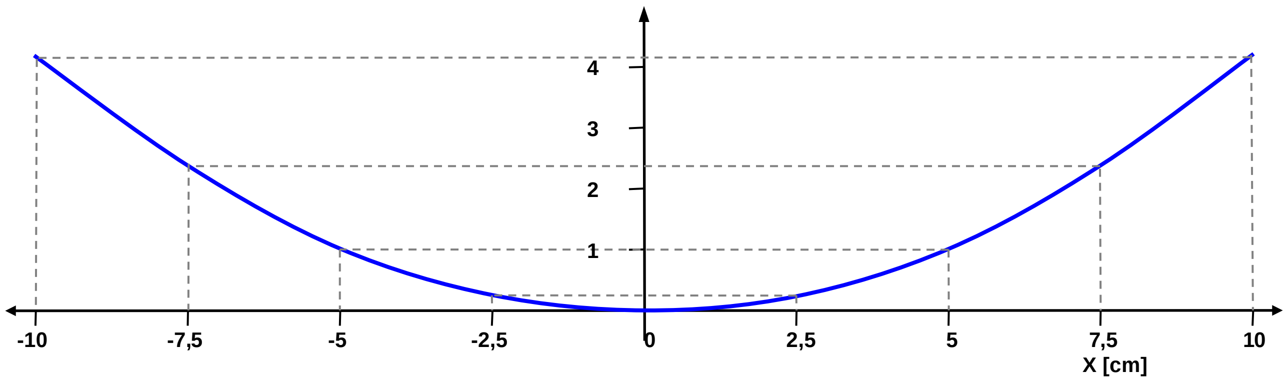
$$\int \ldots = \frac{(2ax+b)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot ar\sinh\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right).$$

Wende die gegebene Formel auf das in Aufgabe 2 aufgeschriebene Integral an und vervollständige die unten stehende Tabelle.

(Die Funktion arsinh (Areasinus Hyperbolicus) findet sich bei den meisten wissenschaftlichen Taschenrechnern.)

Einige Maße für das Papiermodell: Bogenlängen für die Schnittpunkte der Parabelbögen mit den äußeren Rändern der Kreisringe (vom Scheitel aus gemessen) und y-Werte

x = 2,5 cm Bogenlänge: ……. cm y = …….. cm	x = 5 cm Bogenlänge: ……. cm y = ……. cm	x = 7,5 cm Bogenlänge: …….. cm y = ……… cm	x = 10 cm Bogenlänge: ……... cm y = ……… cm



[(→zurück zum Anfang)]

Zusatzaufgabe 2

Für das Papiermodell wurde eine Vereinfachung vorgenommen, die dazu führt, dass die Reflektorschüssel etwas wellig wird, weil Spannungen eingebracht werden. Die Spannungen rühren daher, dass sich die Oberfläche des Rotationsparaboloids nicht nur in zwei Dimensionen wie die Kreisringe des Schnittbogens erstreckt.

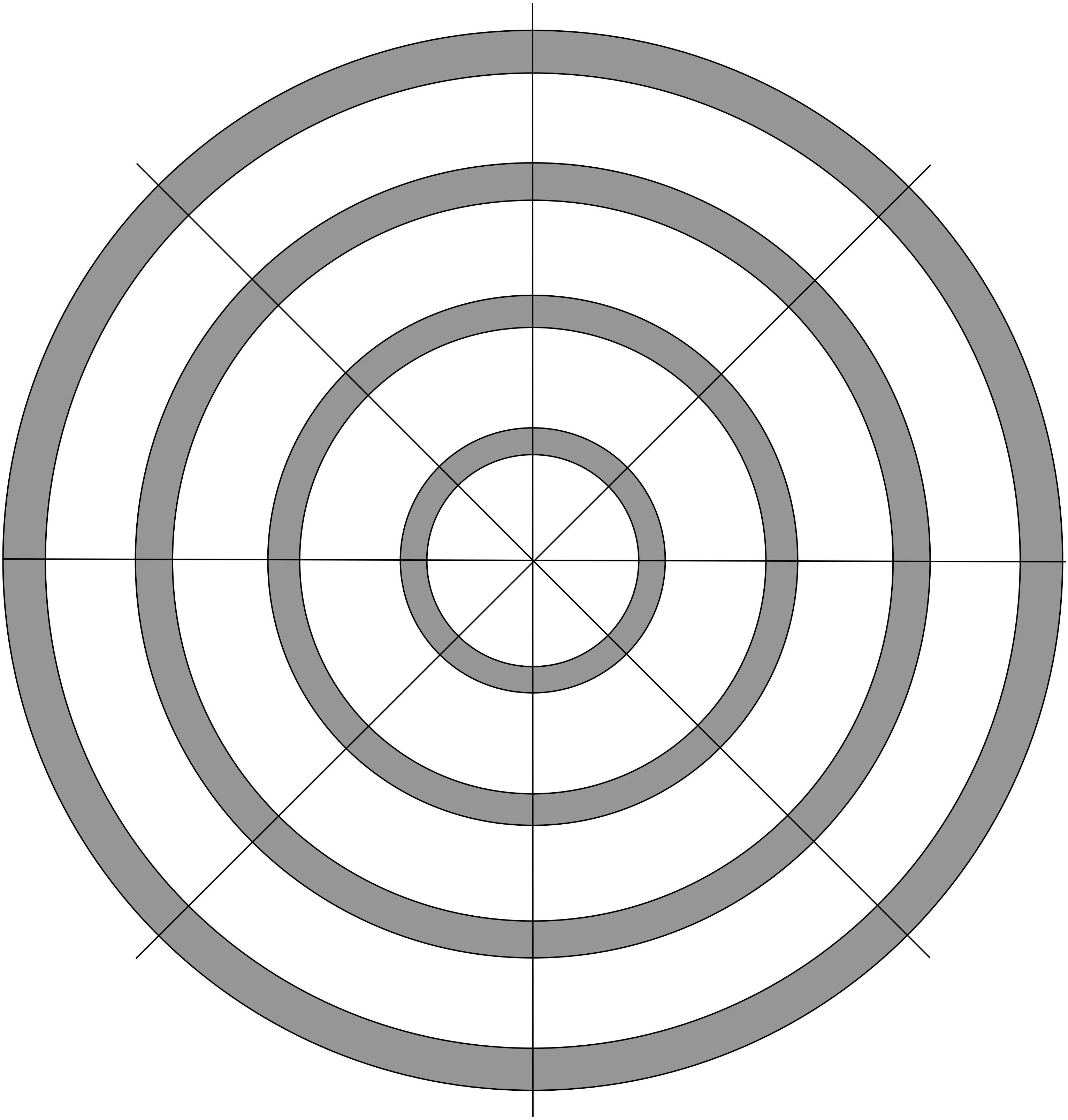
Eine Verbesserung ließe sich erreichen, wenn man die Ringe für die parabolische Schüssel als **Mantelflächen von Kegelstümpfen** betrachtet. Indem man die begrenzenden Radien der Mantelflächen der Kegelstümpfe jeweils an die Parabel anpasst, verringert man die Spannungen deutlich.

Konstruiere die Ringe für einen verbesserten Schnittbogen. Berechne dazu alle nötigen Größen. Die äußeren Ringradien findest Du in der Tabelle und dem Bild oben. Die inneren Ringradien sollten jeweils 5 mm kleiner sein.

[(→zurück zum Anfang)]

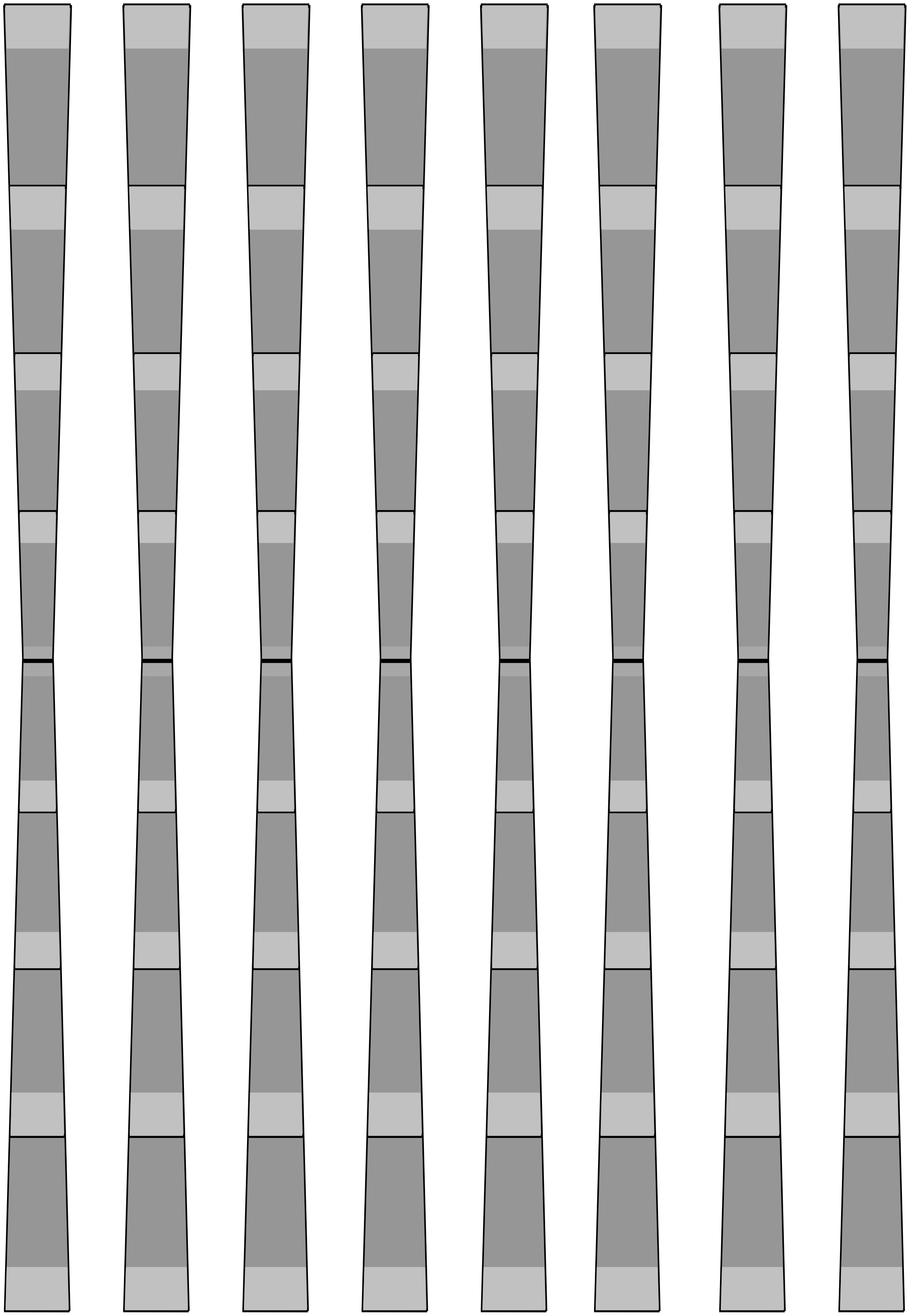
Schnittbogen – Radioteleskopschüssel Effelsberg

Kreisringe (Breiten: 8 mm, 7 mm, 6mm, 5 mm)



Schnittbogen – Radioteleskopschüssel Effelsberg

Parabelstreifen (doppelt so viele wie nötig)



(→zurück zum Anfang)

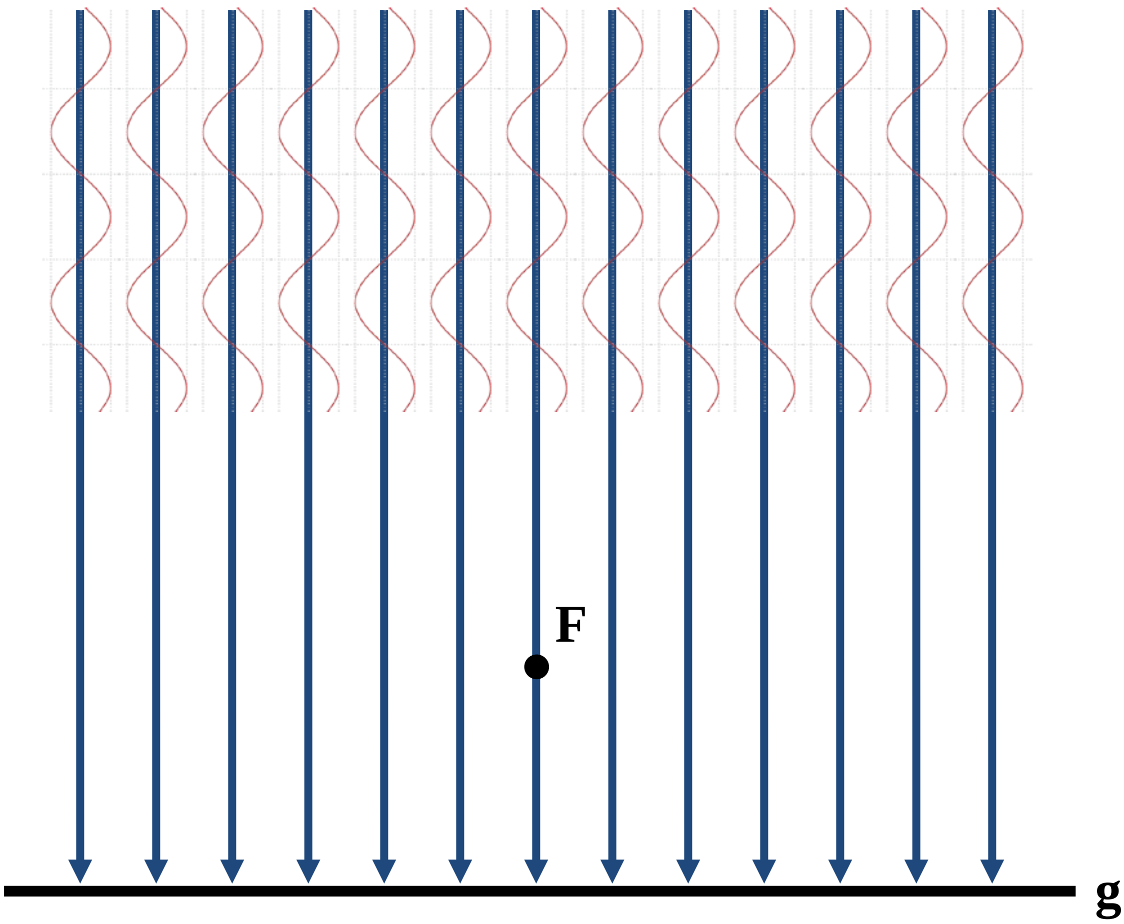
Der richtige Hohlspiegel für die Gleichphasigkeit

Man stelle sich einen konkaven Reflektor zum Sammeln von Schallwellen einer fernen Quelle (die Wellen treffen nahezu eben ein) vor. Das Mikrophon soll dort angebracht werden, wo die Schallwellen konzentriert werden. Eine wichtige Anforderung an die Form des Reflektors ist, dass alle Wellenabschnitte zur gleichen Zeit (mit der gleichen **Phase**) eintreffen. Ansonsten entsteht ein „Klangsalat“. Das Gleiche gilt für den Empfang von Radiowellen. Welche Form muss die Radioschüssel haben?

Gegeben ist ein Bündel von Radiostrahlen (die Wellennormalen), das durch eine geeignet geformte Radioschüssel so im Fokus **F** konzentriert wird, dass alle Radiowellen den gleichen Weg zurücklegen, d. h., mit der gleichen **Phase** in F ankommen. Gegeben ist außerdem die Gerade **g**, bei der alle Radiostrahlen zwar gleichphasig, aber nicht fokussiert eintreffen.

Aufgabe

Konstruiere mit Hilfe der Gerade **g** eine derartige Kurve, so dass alle Strahlen reflektiert und den gleichen Weg bis zum Punkt **F** zurücklegen (und damit **mit der gleichen Phase** in F ankommen). Hinweis: Die Kurve verläuft zwischen F und g. Sie muss so aussehen, dass das Wegestück nach Reflexion dem Wegestück entspricht, das von der Kurve bis zur Gerade g führt. Beschreibe auch Deine Vorgehensweise. Was für eine Kurve entsteht?



(→zurück zum Anfang)

Weitere ingenieurtechnische Überlegungen

Biegebalken im Freihandexperiment

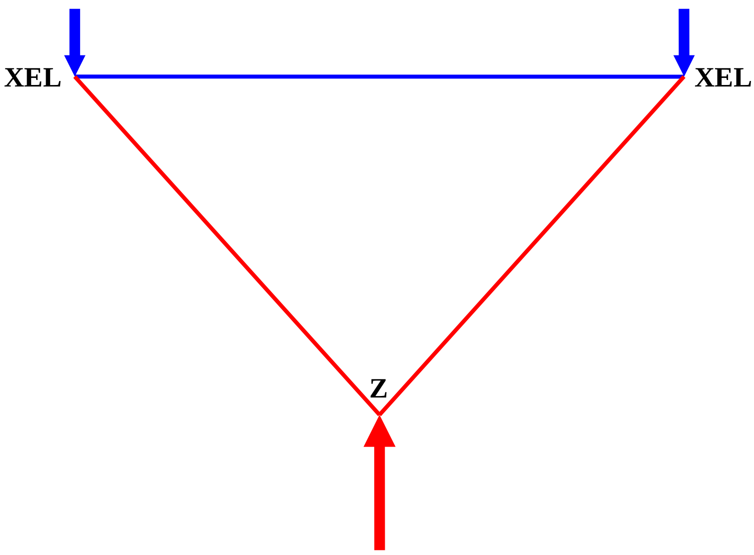
Auf Seite 44 des **SuW-Beitrags 3/2011** wird in der Abbildung der sogenannte Biegebalken für drei verschiedenen Fälle der Unterstützung gezeigt. Dabei wird erwähnt, dass sich der Balken am wenigsten durchbiegt, wenn der Abstand der beiden (symmetrisch angeordneten) Unterstützungspunkte 63 % der Balkenlänge beträgt.
Diese Aussage soll im Folgenden durch ein einfaches Freihandexperiment im Rahmen der dabei möglichen Genauigkeit bestätigt werden. Für das Experiment wird ein Gliedermaßstab (2 m) auf die Kanten zweier Ordnerrücken gelegt und jeweils die Durchbiegung gemessen.
Führe das Freihandexperiment durch, fülle die Messwerttabelle aus und werte diese grafisch (z. B. mit dem Programm EXCEL) mit dem Ziel der Minimumsbestimmung aus.

Abstand der Auflager	2 m*	1,8 m	1,6 m	1,4 m	1,2 m	1 m	0,8 m	0,6 m
Durchbiegung in der Mitte								
Durchbiegung an den Enden								

* wegen der Durchbiegung war der Abstand der Auflager etwas kleiner als 2 m

Kräftezerlegung

(→zurück zum Anfang)



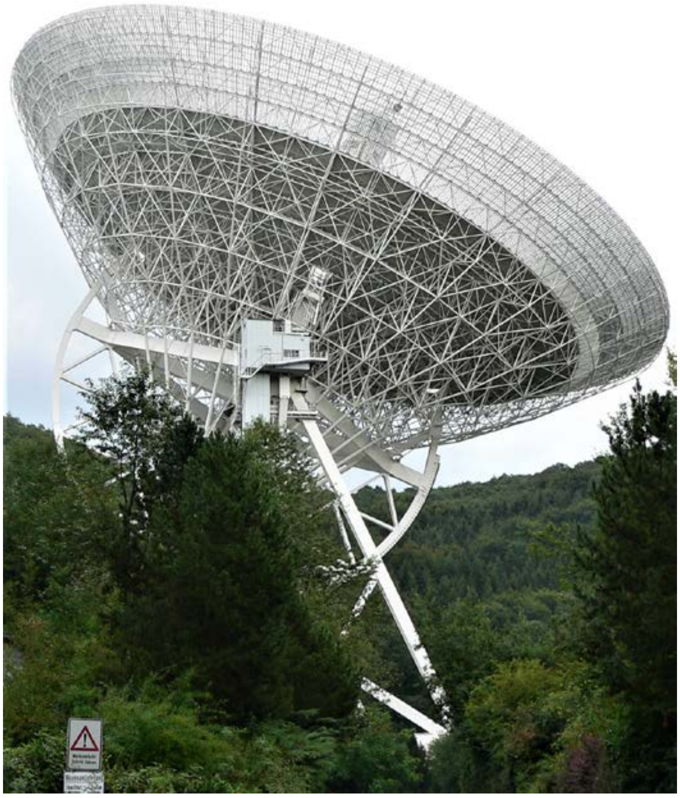
In der Abbildung auf der Seite 45 des **SuW-Beitrags 3/2011** werden der waagerechte (blaue) Stab als Zugstab und die schräg nach unten verlaufenden (roten) Stäbe als Druckstäbe bezeichnet.
Zeige durch Zerlegung der **Kraftvektoren** in den Punkten XEL (Bild rechts) die Berechtigung dieser Begriffe.
Die Abbildung zeigt eine statische Situation, d. h. im Punkt Z addieren sich die Gewichtskräfte und die (passive) Gegenkraft des Auflagers (Summe der beiden Gewichtskräfte) zu Null, so dass eine Situation der Ruhe gewährleistet wird. Zeige dies wiederum mit Hilfe der Kraftvektoren (Pfeile). Wieso kannst Du einen Kraftpfeil an verschiedenen Punkten der Druckstäbe ansetzen?

(→zurück zum Anfang)

Versteifung von Konstruktionen

Bei der Betrachtung der Konstruktion des Radioteleskoptragwerks fallen die vielen diagonalen Streben auf. Diese dienen der Versteifung, da durch die Diagonalen Dreiecke gebildet werden.

Wieso bilden **Dreiecke** z. B. im Gegensatz zu Vierecken starre Gebilde?
Nenne einen mathematischen Grund, der dieser Tatsache zugrunde liegt.



Zur Erhaltung der Rotationssymmetrie der Radioschüssel

1. Die Abbildung auf Seite 44 des **SuW-Beitrag 3/2011** zeigt, dass das nicht homologe Aufsetzen der Reflektorschale auf zwei Stützen zur einer Verformung führt, die Optiker auf das Bildfeld bezogen Astigmatismus nennen.

   Zeige mit einfachen Mitteln am Papiermodell der Teleskopschüssel, dass, wie in SuW beschrieben (6. Seite links), der Reflektorrand im Einflussbereich der Elevationslager „die Ohren anlegt“ und quer dazu nach unten absackt. Mache eine Aufnahme von der verformten Teleskopschüssel.

2. Die Rotationssymmetrie der Radioschüssel lässt sich durch die Anwendung des Regenschirmprinzips (siehe **SuW-Beitrag 3/2011**, Seite 46) gewährleisten, indem die Gewichtskräfte aller Auflagerpunkte gleichartig (homolog) zur Spitze der Stützen (Regenschirmspitze) geleitet werden. Diesen Punkt gilt es dann mit der Elevationsachse zu verbinden.

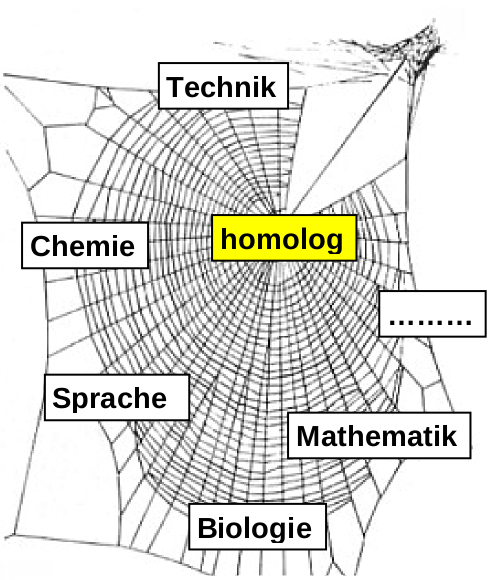
   Zeige am Papiermodell auch, dass bei homologer Auflage die Rotationssymmetrie erhalten bleibt. Mache wieder eine Aufnahme.

(→zurück zum Anfang)

Der Begriff ‚homolog' im „Netz des Wissens"

Der Begriff ‚homolog' taucht in der Wissenschaft (und der Schule) an verschiedenen Stellen auf. Diesen Umstand muss man sich zunutze machen, um durch Herstellung der Bezüge deren Inhalte besser zu verstehen und fester ins Gedächtnis einzubauen. Der folgende Lückentext soll dabei helfen. Aus den untenstehenden Wörtern sind die richtigen auszuwählen und einzusetzen.

Lückentext



©: Laura Bassett, Attribution, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=558393.

Das Wort **homolog** selbst leitet sich aus dem _____ ab und geht auf die Wortteile homo (ὁμός: gleich) und logos (λόγος: hier Definition) zurück.

In der _____ versteht man unter **Homologie** die grundsätzliche Übereinstimmung von z. B. Körperorganen in verschiedenen Tieren. Der übereinstimmende Bauplan lässt auf gleiche Abstammung schließen. So z. B. dienen die Vorderextremitäten von Fledermaus, Maulwurf, Delphin und Pferd zwar ganz verschiedenen Zwecken, ihr Bauplan gleicht aber einander. Bei allen vier Tierarten bestehen die Vorderarme aus dem Oberarmknochen, _____ im Unterarm und einer aus mehreren Knochen zusammengesetzten Handwurzel. In einem anderem Beispiel sind die Fingernägel des Menschen homolog zum _____.

In der _____ kennt man die **homologe Reihe**. Damit meint man eine Gruppe von Verbindungen, die sich nur in der Anzahl bestimmter Atomgruppen unterscheiden und daher durch eine gemeinsame allgemeine Summenformel beschreibbar sind. So z. B. unterscheiden sich die _____ durch die Atomgruppe CH_2 und die allgemeine Summenformel lautet C_nH_{2n+2}. Zur homologen Reihe der _____ gehören z. B. _____ (CH_4) und _____ (C_4H_{10}) .

Der Mathematiker bezeichnet einander entsprechende Punkte, _____ oder _____ in kongruenten oder ähnlichen geometrischen Figuren als **homologe Stücke**.

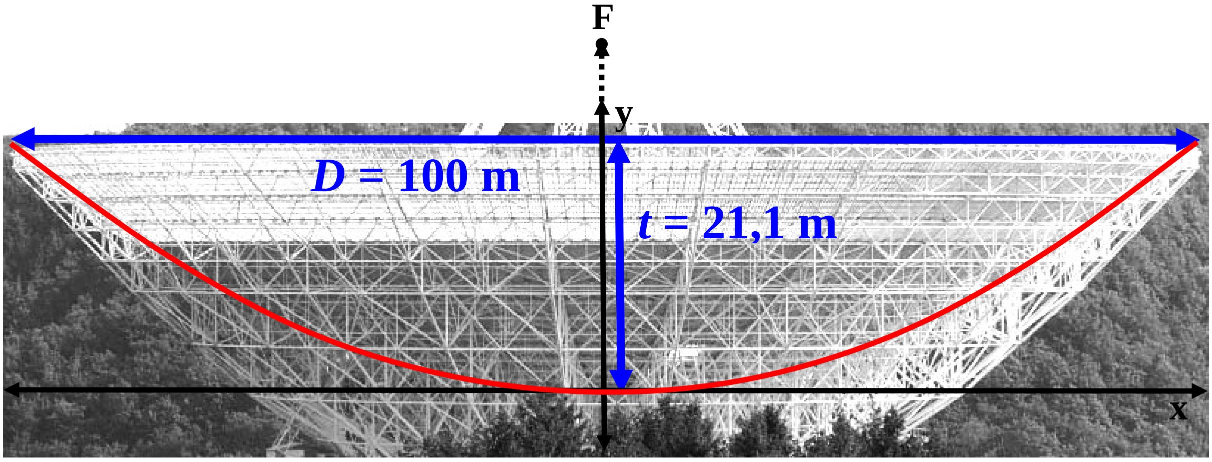
Der Teleskopingenieur möchte, dass sich die Schüssel eines Radioteleskops durch angreifende Kräfte (vor allem _____) gezielt verformt. Dazu muss er u. a. gewährleisten, dass alle Stützungspunkte der Radioschüssel _____ sind, d. h. die gleichen statischen Eigenschaften besitzen.

Wortliste:
Pharmakologie, Athin, Pferdehuf, Biologie, homolog, Lateinischen, das Eigengewicht, Paläontologie, Amboss- und Hammerknöchelchen, Butin, Propan, Butan, Seiten, Äthanole, Ethan, Griechischen, linker und rechter Knochen, Winkel, Biologie, analog, Flächen, Alkane, der Atmosphärendruck, Pentan, Elle und Speiche, Etan, Horn einer Kuh

(→zurück zum Anfang)

Ergebnisse

Arbeitsblatt
„Die Parabel beim Radioteleskop“



1. Siehe Bild: rote Linie im Bild.

2. Ausmessen am Bildschirm: Der Schüsseldurchmesser von D = 100 m entspricht im Bild einer Länge von 22,7 cm. Die Tiefe t (im Bild 4,8 cm) kann durch Verhältnisbildung ermittelt werden:

$$\frac{t}{4{,}8\,\text{cm}} = \frac{D}{22{,}7\,\text{cm}} \quad \rightarrow \quad t = 100\,\text{m} \cdot \frac{4{,}8}{22{,}7} \approx 21{,}1\,\text{m}.$$

3. Die allgemeine Form einer Parabel in der 2. Hauptlage lautet $y = a \cdot x^2$, wobei der Koeffizient a, der die Streckung oder Stauchung der Normalparabel (a = 1) beschreibt, größer Null ist.
Zur Bestimmung von a kann die oben genannte Formel genutzt werden:

$$a = \frac{y}{x^2} = \frac{21{,}1\,\text{m}}{(50\,\text{m})^2} = 0{,}00844\,/\text{m}.$$

Entsprechend kann man alle Punkte der Parabel durch folgende Funktionsgleichung bestimmen:

$$y = \frac{0{,}00844}{\text{m}} \cdot x^2.$$

4. Der Abstand zwischen Scheitelpunkt und Brennpunkt F der Parabel (Brennweite) ermittelt sich aus:

$$f = \frac{1}{4 \cdot a} = \frac{1 \cdot \text{m}}{4 \cdot 0{,}00844} \approx 29{,}6\,\text{m}.$$

Unter http://www.mpifr-bonn.mpg.de/public/eff_d.html wird ein Wert von 30 m angegeben.
Im Schirmbild beträgt die Brennweite f_y (Abstand zwischen Scheitelpunkt und Brennpunkt F) gleich 6,7 cm: $\frac{f_y}{29{,}6\,\text{m}} = \frac{22{,}7\,\text{cm}}{100\,\text{m}} \quad \rightarrow \quad f_y \approx 6{,}7\,\text{cm}.$

(Die angegebenen Ergebnisse sind im Rahmen der möglichen Zeichen- und Messfehler richtig.)

Die Teleskopschüssel im Modell – eine Bauanleitung

1. Der im Papiermodell gewählte Maßstab beträgt 1:500: $\frac{20\text{ cm}}{100\text{ m}} = \frac{1}{500}$.

2. $y = f(x) = \frac{1}{24\text{ cm}} \cdot x^2$.

3. Kurvenintegral zur Bestimmung der Bogenlänge im Modell vom Scheitelpunkt (a = 0) bis zum Schüsselrand (b = 10 cm):

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f(x)'\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{24\text{ cm}}\cdot x^2\right)'\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{12\text{ cm}}\cdot x\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\frac{1}{144\text{ cm}^2}\cdot x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\int_0^{10\text{cm}} \sqrt{1+\frac{1}{144\text{ cm}^2}\cdot x^2}\,\mathrm{d}x.}}$$

Zusatzaufgabe 1

Die Lösung des Integrals der Form $\int_0^{10\text{cm}} \sqrt{1+\frac{1}{144\text{ cm}^2}\cdot x^2}\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$ ergibt sich wie folgt.

Die Koeffizienten in der allgemeinen Lösung sind: a = 1/144 cm², b = 0, c = 1. Folglich ist

$$\int_0^{10\text{cm}} \sqrt{\frac{1}{144\text{ cm}^2}\cdot x^2+1}\quad \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{\frac{2}{144\text{ cm}^2}x\cdot\sqrt{\frac{x^2}{144\text{ cm}^2}+1}}{\frac{4}{144\text{ cm}^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{144\text{ cm}^2}}}\cdot ar\sinh\left(\frac{2\cdot\frac{1}{144\text{ cm}^2}\cdot x}{\sqrt{4\cdot\frac{1}{144\text{ cm}^2}}}\right)\right]_0^{10\text{ cm}}$$

$$= \left[\frac{x\cdot\sqrt{\frac{x^2}{144\text{ cm}^2}+1}}{2} + 6\text{ cm}\cdot ar\sinh\left(\frac{0{,}08\overline{3}}{\text{cm}}\cdot x\right)\right]_0^{10\text{ cm}}$$

$$= \frac{10\text{ cm}\cdot\sqrt{\frac{100}{144}+1}}{2} + 6\text{ cm}\cdot ar\sinh\left(\frac{0{,}08\overline{3}}{\text{cm}}\cdot 10\text{ cm}\right) = 6{,}5\text{ cm} + 6\text{ cm}\cdot ar\sinh\left(0{,}8\overline{3}\right)$$

$$\approx 6{,}5\text{ cm} + 6\text{ cm}\cdot 0{,}758 \approx \underline{\underline{11{,}05\text{ cm}.}}$$

Einige Maße für das Papiermodell: Bogenlängen für die Schnittpunkte der Parabelbögen mit den äußeren Rändern der Kreisringe (vom Scheitel aus gemessen) und y-Werte.

x = 2,5 cm Bogenlänge: 2,52 cm y = 0,26 cm	x = 5 cm Bogenlänge: 5,14 cm y = 1,04 cm	x = 7,5 cm Bogenlänge: 7,96 cm y = 2,34 cm	x = 10 cm Bogenlänge: 11,05 cm y = 4,17 cm

Zusatzaufgabe 2

Für jede Mantelfläche benötigt man zur Konstruktion folgende Maße: den Kegelstumpfradius für die Grundfläche, den Kegelstumpfradius für die Deckfläche, die Höhe und die Länge der Mantellinie des Kegelstumpfs.

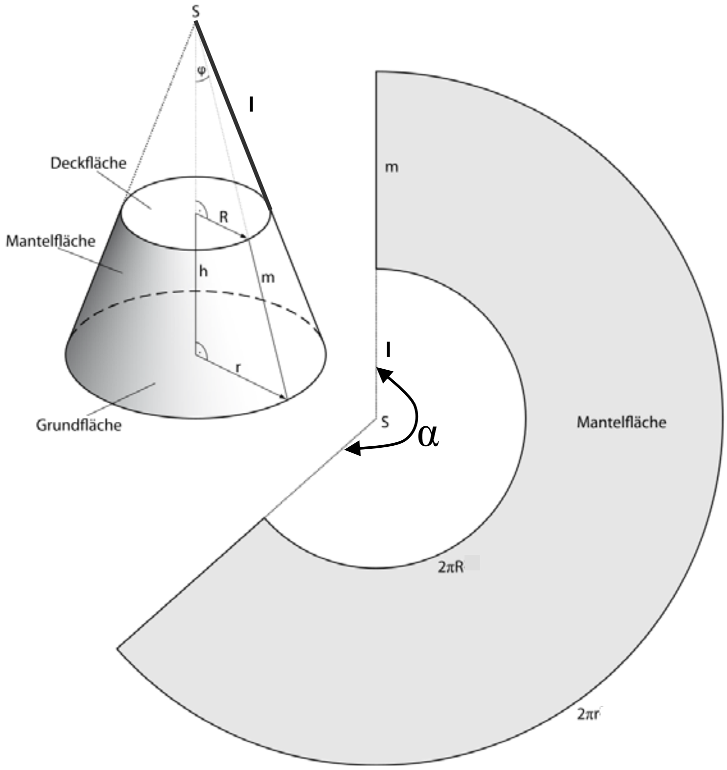
Die Kegelstumpfradien sind gegeben (siehe Tabelle unten). Die Höhen h der 4 Kegelstümpfe (siehe Tabelle unten) ergeben sich mit Hilfe der Funktionsgleichung:

$$h = y_G - y_D = \frac{1}{24\,\text{cm}}\left(x_G{}^2 - x_D{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{24\,\text{cm}}\left(r^2 - R^2\right).$$

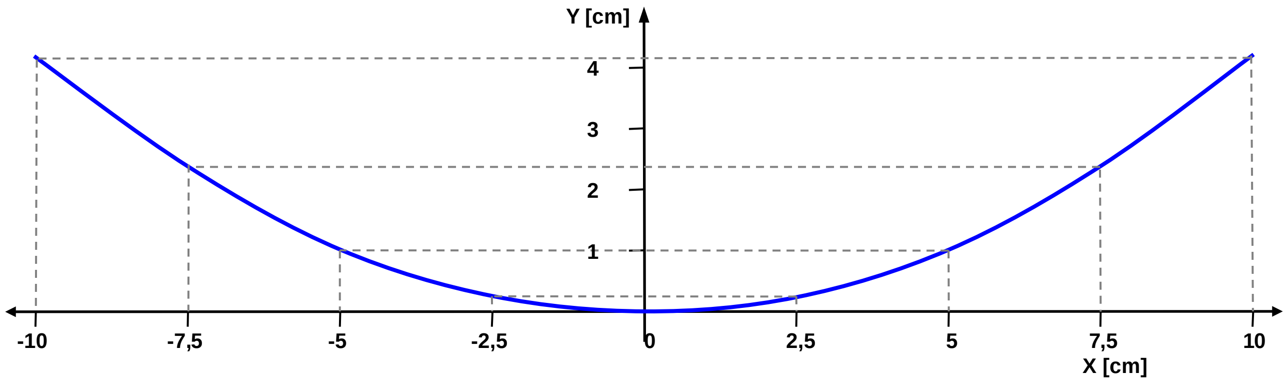
Nun können die Längen m der Mantelflächen wie folgt ermittelt werden: $m = \sqrt{(r-R)^2 + h^2}$.

Die Mantellängen l der abgeschnittenen Kegelspitzen erhält man aus $l = \dfrac{R \cdot m}{r - R}$.



Kegelstumpf. ©: Oldracoon - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11804037.

Nun hat man die Radien l und $(l + m)$ zur Konstruktion der Kreisringstücke (Mantelflächen), und es fehlt nur noch deren Öffnungswinkel α zu berechnen (siehe Bild oben): $\alpha = \dfrac{R}{l} \cdot 360°$.

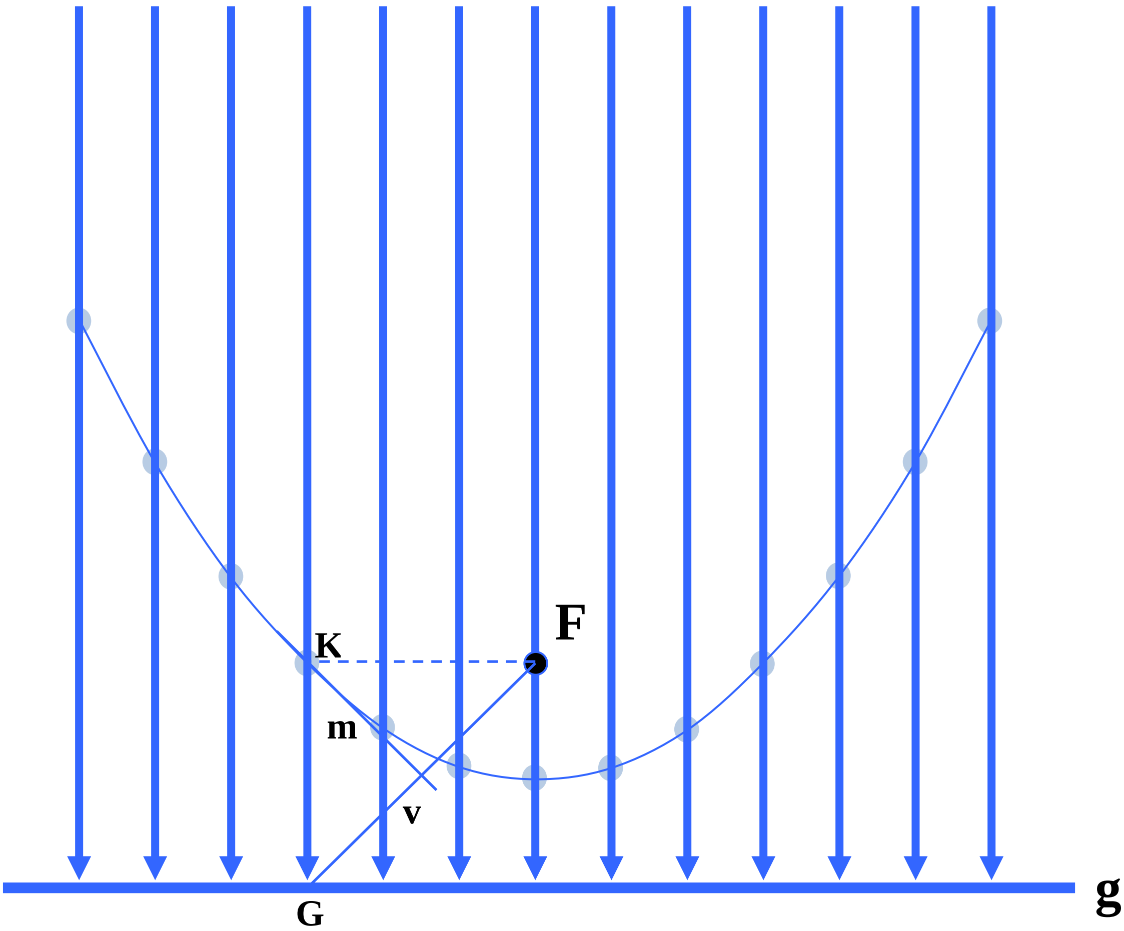


Zwischenergebnisse und Maße (dick) für die Konstruktion der Kegelmantel-Ringe im Papiermodell (siehe oben): Kegelstumpfradius für Grundflächen r = x_G, Kegelstumpfradius für Deckflächen R = x_D, Höhen h der Kegelstümpfe, Längen der Mantellinien m, Längen der Mantellinien l und die Größen der Öffnungswinkel α.

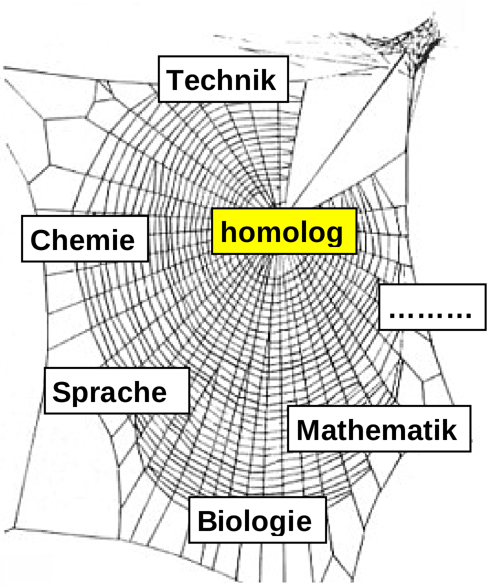
$r = x_G = 2{,}5$ cm $R = x_D = 2$ cm $h = 0{,}09375$ cm	$r = x_G = 5$ cm $R = x_D = 4{,}5$ cm $h \approx 0{,}19792$ cm	$r = x_G = 7{,}5$ cm $R = x_D = 7$ cm $h \approx 0{,}30208$ cm	$r = x_G = 10$ cm $R = x_D = 9{,}5$ cm $h = 0{,}40625$ cm
$\boldsymbol{m \approx 0{,}51}$ **cm** $\boldsymbol{l \approx 2{,}04}$ **cm** $\boldsymbol{\alpha \approx 353}$ **°**	$\boldsymbol{m \approx 0{,}54}$ **cm** $\boldsymbol{l \approx 4{,}9}$ **cm** $\boldsymbol{\alpha \approx 331}$ **°**	$\boldsymbol{m \approx 0{,}584}$ **cm** $\boldsymbol{l \approx 8{,}2}$ **cm** $\boldsymbol{\alpha \approx 307}$ **°**	$\boldsymbol{m \approx 0{,}644}$ **cm** $\boldsymbol{l \approx 12{,}2}$ **cm** $\boldsymbol{\alpha \approx 280}$ **°**

Aufgabe
„Der richtige Hohlspiegel für die Gleichphasigkeit“

Jeder Kurvenpunkt wird wie folgt konstruiert: Zunächst wird der Punkt F mit dem Schnittpunkt G des betrachteten Strahls mit der Geraden g verbunden. Es entsteht die Verbindungsstrecke v. Nun wird die Mittelsenkrechte m auf v konstruiert. Diese schneidet den betrachteten Strahl im gesuchten Kurvenpunkt K, weil die Strecken $\overline{GK}$ und $\overline{KF}$ gleich lang sind.
Die alle Punkte K verbindende Kurve ist eine Parabel.
Ihre Funktionsgleichung lautet: $y = 1/12 \cdot x^2$ (Der Abstand zwischen Brennpunkt F und Gerade g beträgt 6 Einheiten. Die Brennweite f entspricht dem halben Abstand. Es gilt: $a=1/(4 \cdot f)$.).



Lückentext
Der Begriff ‚homolog' im „Netz des Wissens"



©: Laura Bassett, Attribution, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=558393.

Das Wort **homolog** selbst leitet sich aus dem Griechischen ab und geht auf die Wortteile homo (ὁμός: gleich) und logos (λόγος: hier Definition) zurück.

In der Biologie versteht man unter **Homologie** die grundsätzliche Übereinstimmung von z. B. Körperorganen in verschiedenen Tieren. Der übereinstimmende Bauplan lässt auf gleiche Abstammung schließen. So z. B. dienen die Vorderextremitäten von Fledermaus, Maulwurf, Delphin und Pferd zwar ganz verschiedenen Zwecken, ihr Bauplan gleicht aber einander. Bei allen vier Tierarten bestehen die Vorderarme aus dem Oberarmknochen, Elle und Speiche im Unterarm und einer aus mehreren Knochen zusammengesetzten Handwurzel. In einem anderen Beispiel sind die Fingernägel des Menschen homolog zum Pferdehuf.

In der Chemie kennt man die **homologe Reihe**. Damit meint man eine Gruppe von Verbindungen, die sich nur in der Anzahl bestimmter Atomgruppen unterscheiden und daher durch eine gemeinsame allgemeine Summenformel beschreibbar sind. So z. B. unterscheiden sich die Alkane durch die Atomgruppe CH_2 und die allgemeine Summenformel lautet C_nH_{2n+2}. Zur homologen Reihe der Alkane gehören z. B. Methan (CH_4) und Butan (C_4H_{10}) .

Der Mathematiker bezeichnet einander entsprechende Punkte, Seiten oder Winkel in kongruenten oder ähnlichen geometrischen Figuren als **homologe Stücke**.

Der Teleskopingenieur möchte, dass sich die Schüssel eines Radioteleskops durch angreifende Kräfte (vor allem das Eigengewicht) gezielt verformt. Dazu muss er u. a. gewährleisten, dass alle Stützungspunkte der Radioschüssel **homolog** sind, d. h. die gleichen statischen Eigenschaften besitzen.

Weitere ingenieurtechnische Überlegungen

Biegebalken im Freihandexperiment

2 m

1,8 m

1,6 m

1,4 m

1,2 m

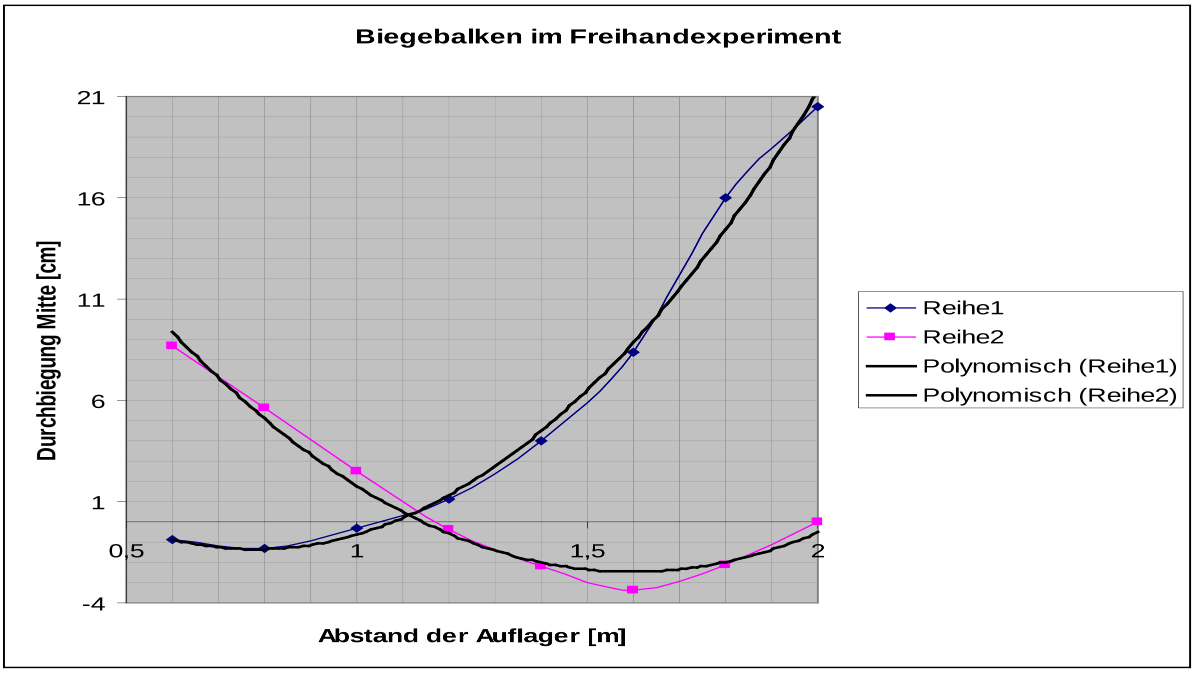
1 m

0,8 m

0,6 m

Abstand der Auflager	2,0 m*	1,8 m	1,6 m	1,4 m	1,2 m	1,0 m	0,8 m	0,6 m
Durchbiegung in der Mitte	20,5 cm	16,0 cm	8,4 cm	4,0 cm	1,1 cm	-0,3cm	-1,3 cm	-0,9 cm
Durchbiegung an den Enden (Mittel)	-	-2,1 cm	-3,4 cm	-2,2 cm	-0,4 cm	2,5 cm	5,6 cm	8,7 cm

* wegen der Durchbiegung war der Abstand der Auflager etwas kleiner als 2 m



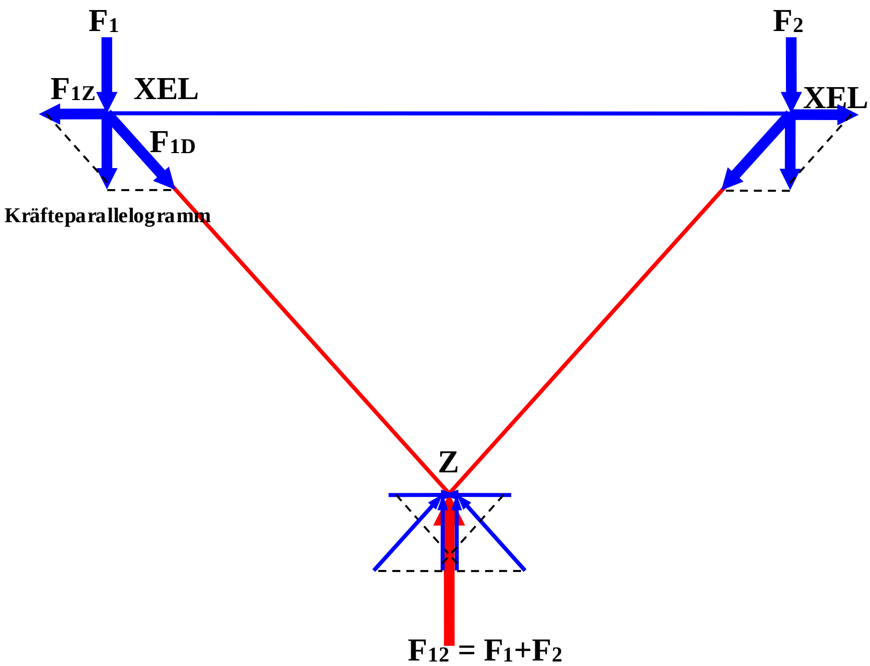
Die minimale Durchbiegung liegt dort, wo sich die Trendlinie für Reihe 1 (Mitte) mit der Trendlinie für Reihe 2 (Enden) schneidet, d. h. bei etwa 1,12. Das sind 56 %. Als Abschätzung ist dieses Ergebnis vertretbar.

Kräftezerlegung

- Der Kraftvektor $\mathbf{F_1}$ kann in einem Kräfteparallelogramm in die Kräfte zerlegt werden, die entlang der Stäbe wirken. Dabei stellt sich heraus, dass die Kraftkomponente $\mathbf{F_{1D}}$ in den roten Stab hineindrückt und die Kraftkomponente $\mathbf{F_{1Z}}$ am blauen Stab zieht.

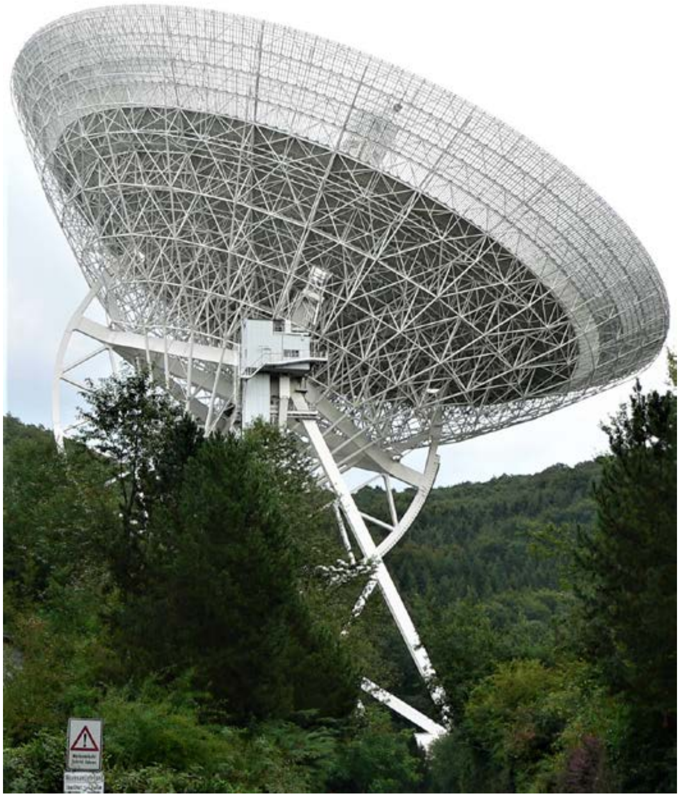
- Die Kräfteparallelogramme von $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$ (die den gleichen Betrag haben) werden entlang der roten Stäbe bis in den Punkt Z verschoben. Dort addieren sich $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$ zu $\mathbf{F_{12}}$.

- Für Vektoren gilt, dass sie entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden können. Entsprechend wurden der Kraftvektor $\mathbf{F_1}$ zur Zerlegung senkrecht nach unten in den Punkt XEL oder die Kraftkomponente $\mathbf{F_{1D}}$ zur Kräfteaddition entlang des Druckstabs in den Punkt Z geschoben.



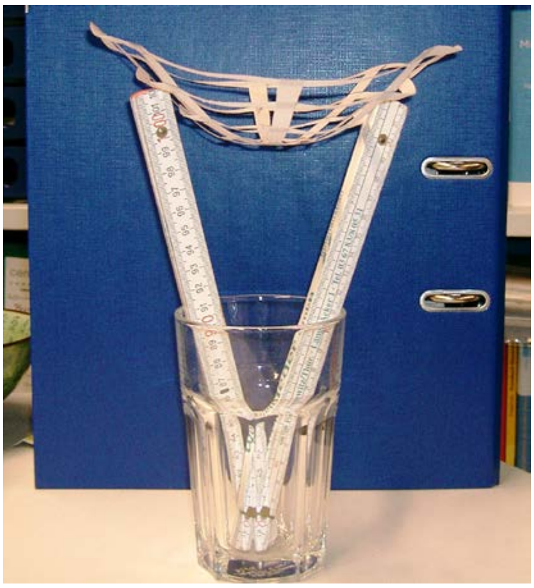
Versteifung von Konstruktionen

Bei der Betrachtung der Konstruktion des Radioteleskoptragwerks fallen die vielen diagonalen Streben auf. Diese dienen der Versteifung, da durch die Diagonalen Dreiecke gebildet werden. Dreiecke sind im Gegensatz zu Viel-ecken mit mehr als 3 Ecken nicht in sich starr.

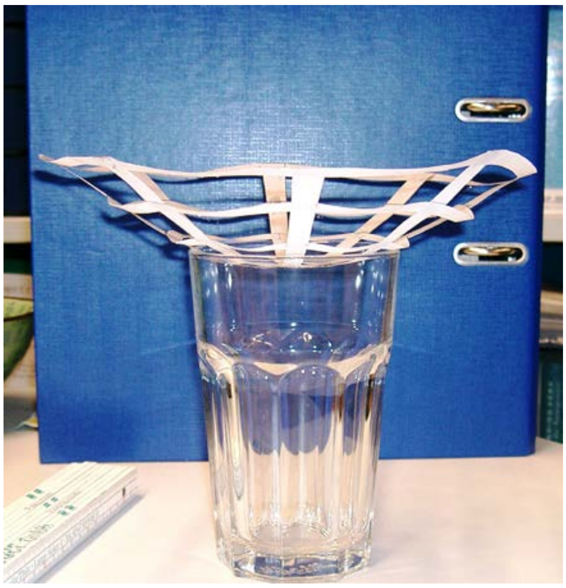


Ein Dreieck ist eindeutig definiert durch 3 Seiten. Es kann also kein anderes Dreieck geben.
Ein Quadrat z. B. ist durch 4 Seiten nicht eindeutig definiert. Es kann in sich zu einem Rhombus verdreht werden.

Zur Erhaltung der Rotationssymmetrie der Radioschüssel



Bei nicht homologer Auflage kommt es zu einer astigmatischen Verformung.



Bei homologer Auflage verformt sich die Reflektorschüssel nur in radialer Richtung (Die Welligkeit des Modells ist dessen Unvollkommenheit geschuldet.).