

Die neue Welle

In Bezug zu „Eine neue Ära der Astrophysik – Das Zeitalter der Gravitationswellen-Astronomie hat begonnen“ in der Zeitschrift »Sterne und Weltraum« 4/2016, S. 24-35, Zielgruppe: Oberstufe, WIS-ID: 1377457

Axel Quetz, Olaf Fischer

„Zum Nachdenken“ - so heißt eine Rubrik in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“, die den Leser jeden Monat aufs Neue herausfordert, seine astronomisch-physikalisch-mathematischen „Messers zu wetzen“, um ein astrophysikalisches Problem zu lösen, welches auf den aktuellen Zeitschrifteninhalt Bezug nimmt. In Heft 4/2016 ging es um das Nachvollziehen der Auswertung der ersten direkten Gravitationswellenmessung. Ziel war die Bestimmung der Chirp-Masse eines Doppelsystems Schwarzer Löcher, welches in der Endphase seiner Existenz messbare Gravitationswellen aussendet. Die Chirp-Masse ist ein Maß für die Gesamtmasse des Systems von gleicher Größenordnung

Die Bestätigung des durch die Forscher ermittelten Massenwertes verleiht dem Aufgabenlöser Bestätigung seiner Fertigkeiten und, für Schüler wichtig, die Motivation zur weiteren Beschäftigung mit physikalischen Fragestellungen.

Im folgenden kurzen WIS-Beitrag geht es um die Bestimmung der Chirp-Masse auf Grundlage von Diagramm Daten. Dazu wird ein **Arbeitsblatt** angeboten. Für die Einführung der für den Schüler neuartigen Wellenart wird zunächst ein **Vergleich** mit schon bekannten Wellenarten vorgestellt.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	Schwingungen und Wellen	Welle, Wellenarten im Vergleich, Periode und Frequenz, Wellen im Diagramm
Fächer- verknüpfung	Astro-Ma	Diagrammablesung, Zeitableitung im Diagramm (Anstieg und Sekante), Vereinfachung von Gleichungen, Rechnen mit gebrochenzahligen Exponenten
Lehre allgemein	Kompetenzen (Erkenntnis), Unterrichtsmittel	Wissenstransfer durch Vergleich, Diagrammauswertung, Arbeitsblatt, Animationen zu Wellenarten

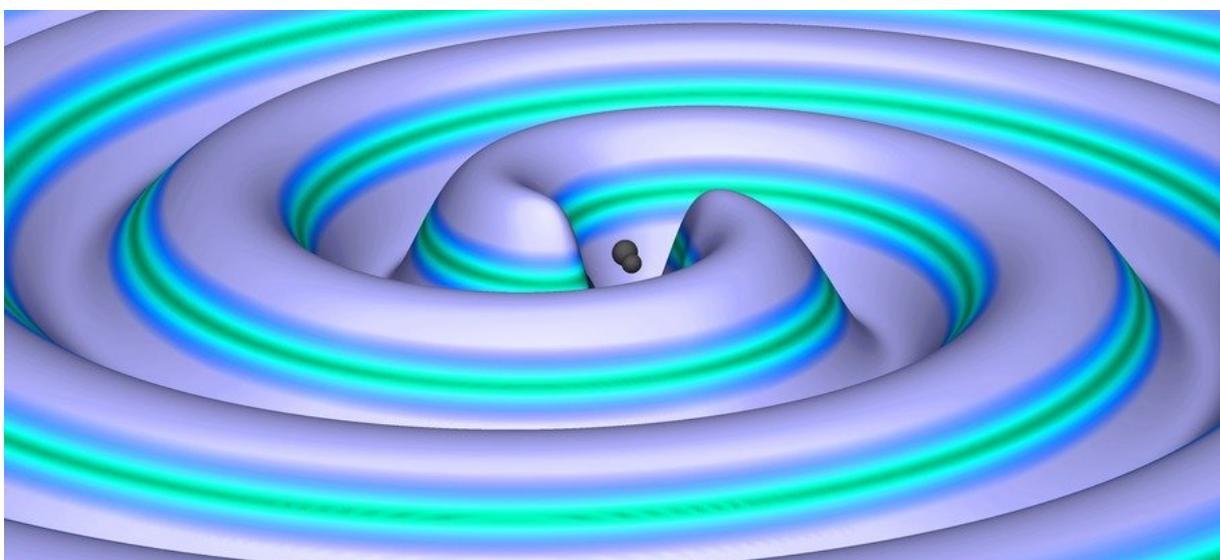


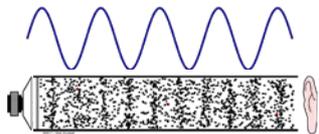
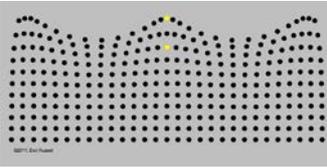
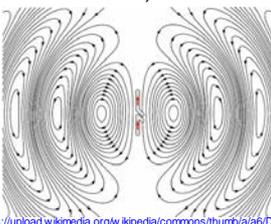
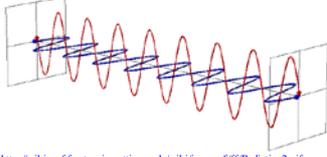
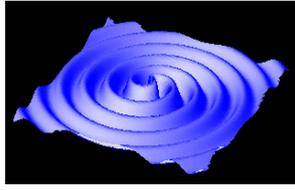
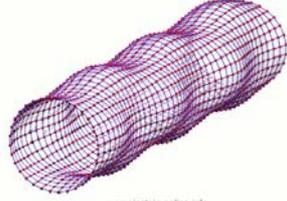
Abbildung 1: Der (periodische) enge Orbit zweier sehr großer Massen geschieht bei riesigen Beschleunigungen und führt damit zu einer messbaren periodischen Veränderung der Raumstruktur. ©: Numerisch-relativistische Simulation: S. Ossokine, A. Buonanno (Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik), Simulating eXtreme Spacetimes Project. <https://www.aei.mpg.de/2111950/gw170814>.

Wellen im Vergleich

Zunächst soll in Erinnerung gerufen werden, was man aus physikalischer Sicht unter einer Welle zu verstehen hat. Dazu muss zuerst der Begriff Schwingung beleuchtet werden. Ändert sich eine physikalische Größe (z. B. die Auslenkung eines Pendels oder die Luftdichte oder die elektrische Feldstärke) zeitlich periodisch, so bezeichnet man diesen Vorgang als Schwingung. Setzt sich dieser Vorgang durch Wechselwirkung der Schwingen in den Raum hinein fort, so spricht man von einer Welle. Bei dieser konventionellen Redeweise wird der Raum selbst nicht zu den veränderlichen physikalischen Größen gezählt.

Bei den Gravitationswellen unterliegen Raum und Zeit der Veränderlichkeit; auch sie haben die Fähigkeit zu schwingen. Diese Schwingungen pflanzen sich mit Lichtgeschwindigkeit fort.

Analogien und Vergleiche sind starke didaktische Instrumente, die Anknüpfungspunkte für das Einführen von neuem Stoff bieten und gut sind für das Memorieren. Im Folgenden sollen die Gravitationswellen im Vergleich mit anderen dem Schüler schon bekannten Wellenarten betrachtet werden.

Wellenart	Medienwellen nur in Medien	Feldwellen in Feldern, auch im Vakuum	Raumwellen im Ausbreitungsmedium selbst
Beispiel	Schallwellen (Dichtewellen)	elektromagnetische Wellen	Gravitationswellen
Auslösung durch	Auslenkung eines Medienelements (Teilchens)	Beschleunigte Ladung	Beschleunigte Masse
Fortpflanzung im Raum durch (Ausbreitung)	Kopplung zwischen Teilchen im Medium (Stöße, Bindungen, Schwerkraft)	Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Wechselfeldern (losgelöst von Ladungen): Ein veränderliches Magnetfeld induziert Spannung (ein elektrisches Feld), welches seinerseits zu einem Strom (einem magnetischen Feld) führt.	Wechselwirkung vom Raum-Elementen (losgelöst von Massen): Durch die Kopplung zwischen Masse und Raum vermittelt letzterer die Gravitation („stellvertretend“ für die auslösende beschleunigte Masse).
Schwingungsmuster in Ausbreitungsrichtung	<ul style="list-style-type: none"> • Longitudinal: Schallwellen • Transversal: z. B. Scherungswellen (die Schwingungsrichtungen können dabei einem Muster folgen → Polarisierung) • Longitudinal und transversal: z. B. Wasserwellen 	Transversal (Dipol)	Transversal (Quadrupol)
Veranschaulichungen und Animationen	<p>Bei Schallwellen schwingen die Teilchen in Ausbreitungsrichtung.</p>  <p>http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/lw-ave-v6.gif</p> <p>Bei Wasserwellen kreisen die Wasserteilchen im Uhrzeigersinn (Radius nimmt mit Tiefe ab). (Autor: Dan Russell, PennState University)</p>  <p>http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/Water-v8.gif</p>	<p>Elektromagnetische Wellen lösen sich von einem Dipol ab. (Autor: Chetvorno)</p>  <p>https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a6/Dipole_xmling_antenna_animation_4_408x318x150ms.gif/310px-Dipole_xmling_antenna_animation_4_408x318x150ms.gif</p> <p>Elektrische und magnetische Feldrichtungen stehen senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. (User: Hfuchs)</p>  <p>http://wiki.lwf.forst.uni-goettingen.de/wiki/images/ff/Radiation2.gif</p>	<p>Durch einander umkreisende Massen ausgelöste Gravitationswelle im 2D-Bild. (Autor: NASA)</p>  <p>http://spaceplace.nasa.gov/review/lisa-q-waves/lisa_wavy_en.gif</p> <p>Raumelemente werden zugleich gestreckt und gestaucht.</p>  <p>http://blq.schockwellenreiter.de/2016/02/images/qw-waves-wave.gif</p>

Die Gravitationswelle im Diagramm

Gravitationswellen entstehen im Prinzip immer, wenn Massen sich beschleunigt bewegen (analog zur Entstehung elektromagnetischer Wellen durch beschleunigte Ladungen).

Merklich (messbar) wird dies aber erst für Extremfälle, wie z. B. in der Endphase von Systemen sich umlaufender Schwarzer Löcher. So geht die erste Messung von Gravitationswellen auf ein Binärsystem aus stellaren Schwarzen Löchern zurück, welches sich in einer etwa 1,3 Mrd. Lichtjahre entfernten Galaxie vermutlich in Richtung zum südlichen Sternbild „Fluss Eridanus“ befindet. Dieses Gravitationswellenobjekt erhielt die Bezeichnung GW 150914 (die Welle passierte die beiden LIGO-Detektoren am 14.9.2015).

Das folgende Diagramm (Abb. 2) zeigt die geglättete Kurve dieser ersten direkten Gravitationswellenmessung. Die Gravitationswellenstrahlung entstand aus der mechanischen Energie (Bewegung der beiden Schwarzen Löcher umeinander und der potenziellen Energie ihres gegenseitigen Abstands) wie auch aus etwas Masse (hier ca. 3 Sonnenmassen) des Binärsystems, indem die sich umlaufenden Schwarzen Löcher ihren Abstand bis hin zur Verschmelzung (Merger) verringerten (und abschließend zu einem schnell rotierenden und entsprechend verformten Schwarzen Loch (dem sogenannte Ring-down) wurden).

Für geringere Frequenzen der Gravitationswellenstrahlung (Phase: „Inspiral“, siehe Grafik) besteht ein Zusammenhang zwischen der sogenannten Chirp-Masse M_{ch} (welche auf die Einzelmassen der aufeinander zu spiralenden Schwarzen Löcher zurückgeführt werden kann) und der Kombination aus Frequenz f der Strahlung und ihrer zeitlichen Zunahme df/dt . Es gilt:

$$M_{\text{ch}} = \frac{(m_1 \cdot m_2)^3}{(m_1 + m_2)^5} = \frac{c^3}{\gamma} \left[\frac{5}{96} \cdot \pi^{\frac{8}{3}} \cdot f^{-\frac{11}{3}} \cdot \frac{df}{dt} \right]^{\frac{3}{5}}$$

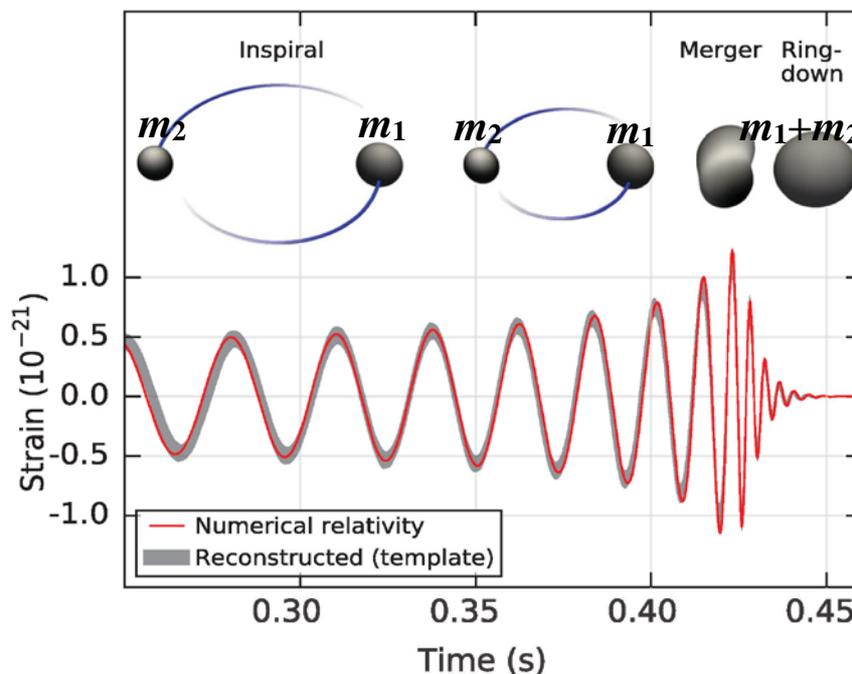


Abbildung 2:
Periodische Änderung der relativen Länge (strain (engl.): Dehnung) der 4-km-Strecke des LIGO-H1-Detektors infolge der Gravitationswellen, die beim „Aufeinanderzuspieren“ zweier sich umlaufender Schwarzer Löcher in der Endphase entstehen. (Bild aus PHYSICAL REVIEW LETTERS 116, 061102 (2016), Seite 061102-3)

Schüler sind in der Lage, aus obenstehendem Diagramm Frequenzen und dazugehörige Frequenzänderungen (-zunahmen) abzulesen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Frequenz kontinuierlich zunimmt, so dass diese für bestimmte Zeitpunkte ermittelt werden muss.

Im vorliegenden Diagramm soll die Frequenz f für die ersten Wellenzüge ermittelt werden. Der Zeitpunkt t für jede Frequenz f wird jeweils durch den nach dem halben Wellenzug vorliegenden angenähert. Die Ergebnisse werden in ein Diagramm $f(t)$ eingetragen. Die zeitliche Änderung (Zeitableitung) der Frequenz df/dt kann im Diagramm aus dem Anstieg einer Sekante, die den gewünschten Kurvenpunkt einschließt, ermittelt werden.

Arbeitsblatt „Auswertung eines Gravitationswellendiagramms“

Messbare Gravitationswellen entstehen, wenn sich sehr große Massen beschleunigt bewegen. Änderungen der Raumkrümmung vor Ort pflanzen sich fort und führen dazu, dass sich Abstände beim Empfänger periodisch ändern. Es handelt sich dabei um unvorstellbar kleine Änderungen, die nun erstmals mit dem Detektor LIGO-H1 nachgewiesen worden.

Die erste Gravitationswellenmessung geht auf ein Binärsystem aus stellaren Schwarzen Löchern hervor, welches sich in einer etwa 1,3 Mrd. Lichtjahre entfernten Galaxie vermutlich in Richtung zum südlichen Sternbild „Fluss Eridanus“ befindet. Die von diesem Objekt ausgehenden Gravitationswellen mit der Bezeichnung GW150914 ließen die 4 km lange Detektorstrecke von LIGO um etwa das 10^{-21} -Fache ihrer Länge, d. h. um ca. $10^{-21} \cdot 4 \text{ km} = 4 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ kurzzeitig in einer dafür typischen Weise „vibrieren“. Die dabei entstandene Raumgrößenschwankung entspricht nur dem 425-ten Teil des Protonendurchmessers!!! Die Kunst der Wissenschaftler besteht darin, diese winzige Längenänderung zu messen.

Das folgende Diagramm zeigt die geglättete Kurve dieser ersten direkten Gravitationswellenmessung. Es gilt die Frequenz f und ihre zeitliche Zunahme df/dt (angenähert durch $\Delta f/\Delta t$) der entstehenden Gravitationswellen für die ersten Wellenzüge mit geringen Frequenzen zu bestimmen. Aus f und $\Delta f/\Delta t$ sowie den Konstanten π , $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (Lichtgeschwindigkeit) und $\gamma = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (Gravitationskonstante) ist dann die sogenannte Chirp-Masse M_{ch} wie folgt zu berechnen¹, welche auf die Einzelmassen m_1 und m_2 der Schwarzen Löcher zurückgeht:

$$M_{\text{ch}} = \frac{c^3}{\gamma} \cdot \left[\frac{5}{96} \cdot \pi^{\frac{8}{3}} \cdot f^{-\frac{11}{3}} \cdot \frac{df}{dt} \right]^{\frac{3}{5}} = \frac{(m_1 \cdot m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}$$

Schritte der Auswertung und Tabelle für Messwerte und Ergebnisse

- Lies im Diagramm für die 7 durch Hilfslinien markierten Messpunkte die Zeiten t_n ab und trage diese und alle folgenden Ergebnisse in die unten stehende Tabelle ein!
- Bestimme aus den Zeiten wie in der Tabelle angegeben fortlaufend die Periodendauern T_{n+1} und daraus die Frequenzen f_{n+1} für $n = 1 \dots 5$. (Diese gelten für die Zeiten mit den Hilfslinien 2...6).
- Stelle den Frequenzverlauf über der Zeit in einem Diagramm dar. Nutze dazu z. B. das Programm EXCEL.
- Die Werte für die fortschreitende Frequenzänderung (-zunahme) $(\Delta f/\Delta t)_{n+2}$ können nun jeweils zwischen zwei zuvor berechneten Frequenzen ermittelt werden ($n = 1 \dots 3$, d. h. für die Zeiten mit den Hilfslinien 3...5).
- Vereinfache obige Formel soweit, dass nur noch der Term $[f^{-11/3} \cdot \Delta f/\Delta t]^{3/5}$ als Variable vorkommt!
- Berechne abschließend jeweils die Chirp-Masse M_{ch} für die Zeiten bei den Hilfslinien 3...5!

Hilfs- linie	Zeit	Periode	Frequenz	Frequenzänderung	Chirp-Masse	
n	t_n	$T_{n+1} = t_{n+2} - t_n$	$f_{n+1} = \frac{1}{T_{n+1}}$	$\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)_{n+2} = \frac{f_{n+3} - f_{n+1}}{t_{n+3} - t_{n+1}}$	$\left[\left(f^{\frac{11}{3}}\right)_{n+2} \cdot \left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)_{n+2} \right]^{\frac{3}{5}}, M_{n+2}$	
	[s]	($n = 1 \dots 5$) [s]	($n = 1 \dots 3$) [s ⁻¹ = Hz]	($n = 1 \dots 3$) [Hz / s]	($n = 1 \dots 3$) [s]	[M _{Sonne}]
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

¹ Abbott, B. P. und Mitarbeiter: Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, in: Physical Review Letters 116, 061102, 12. Februar 2016

Daten aus aus PHYSICAL REVIEW LETTERS 116, 061102 (2016), Seite 061102-3, siehe auch:
<https://www.gw-openscience.org/GW150914data/P150914/fig2-waveform.png>.

