

Spektroskopische Vermessung der Erdbahn und Bestimmung der Sonnenmasse

In Bezug auf den Beitrag „Echelle-Spektroskopie: Präzision in Farbe“ von Paul Heeren in SuW 4/2018, S. 64 – 72, Zielgruppe: 1. Orientierungsstufe, WIS-ID: 1421033

Dr. Markus Mugrauer und Hannes Keppler
(Universitäts-Sternwarte Jena und Landesschule Pforta)

Der Blick in den weiten dunklen Nachthimmel beeindruckt die Menschen seit jeher. Umso faszinierender ist es, aus der Beobachtung ferner Sterne etwas über unseren eigenen Planeten und dessen Zentralgestirn, die Sonne, zu lernen. Dies ist ganzjährig mittels spektroskopischer Beobachtungen von Sternen möglich. Dabei können nicht nur die chemische Zusammensetzung, Temperatur und viele weitere wichtige Eigenschaften der beobachteten Sterne genau charakterisiert sondern auch ihre räumliche Bewegung relativ zur Erde präzise vermessen werden. Aus diesen Beobachtungen können dann die Eigenschaften der Erdumlaufbahn um die Sonne sowie die Masse unseres Zentralgestirns abgeleitet werden.

Im Rahmen einer Forschungsarbeit wertete Hannes Keppler von der Landesschule Pforta insgesamt 47 Spektren der Wega aus, die am 90-cm-Spiegelteleskop der Universitäts-Sternwarte Jena in einem Zeitraum von knapp 2 Jahren aufgenommen wurden. Er ermittelte aus den Spektren die Radialgeschwindigkeiten und bestimmte aus diesen schließlich die Erdbahnparameter und die Sonnenmasse. Im Folgenden sollen die Grundlagen, der Auswertegang und die Ergebnisse beschrieben werden.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag: Oberstufe		
Astronomie	Planeten, Sterne, Astropraxis	Erdbahnellipse, Kepler'sche Gesetze, Venustransit, Astrospektroskopie, Wegaspektrum, Radialgeschwindigkeit, Dopplerverschiebung, Bestimmung der Erdbahngeschwindigkeit und der Sonnenmasse
Physik	Quantenphysik, Optik	Balmerlinien, Bohr'sches Atommodell, Dopplereffekt
Fächerverknüpfung	Astro-Ma	Sphärische Trigonometrie, Minimierung der quadratischen Abweichung
Lehre allgemein	Kompetenzen (Wissen und Erkenntnis), Lehr-/Sozialform, Unterrichtsmittel	Wiederholung und Festigung von Grundlagenwissen, Analyse von Beobachtungsdaten, Schülerforschungsprojekt, Aufgaben

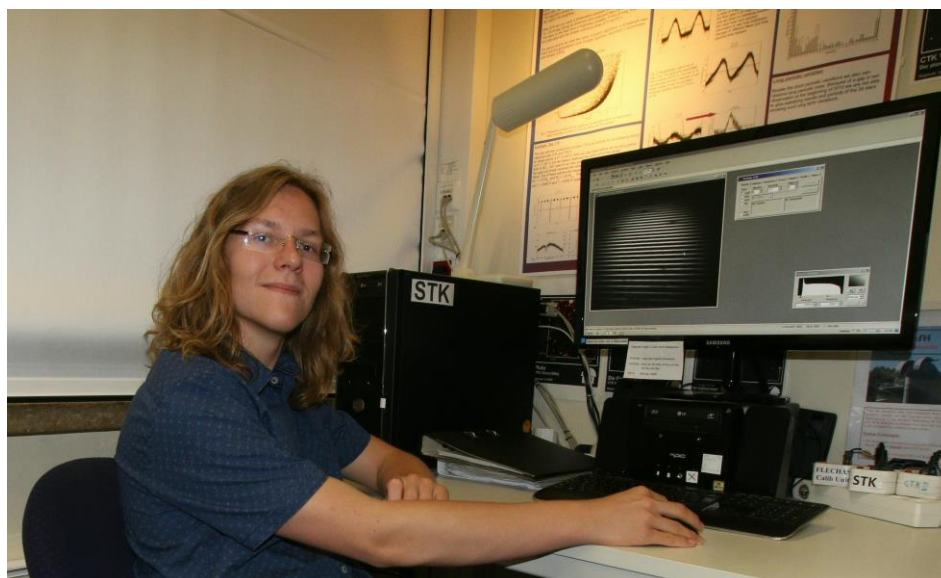


Abbildung 1: Einer der Autoren, Hannes Keppler, im Kontrollraum der Universitäts-Sternwarte Jena bei der nächtlichen Beobachtung mit dem Echelle-Spektrografen FLECHAS. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

Einleitung

Schon den frühesten Himmelsbeobachtern waren Sterne am Himmel aufgefallen, die sich relativ zu den anderen scheinbar fix am Firmament stehenden Gestirnen bewegen. Im antiken Griechenland wurden diese Wandelsterne als Planeten bezeichnet, die sich am Himmel im zeitlichen Mittel wie die Sonne in östlicher Richtung relativ zu den Fixsternen bewegen. Dabei halten sich die Planeten Merkur und Venus immer in der Nähe der Sonne auf und sind so nur in den Dämmerungsphasen sichtbar. Die Planeten Mars, Jupiter und Saturn sind am Himmel dagegen auch entgegengesetzt (also in Opposition) zur Sonne beobachtbar. Dasselbe gilt auch für die erst im 18. bzw. 19. Jahrhundert durch Himmelsbeobachtungen mit Teleskopen entdeckten Planeten Uranus und Neptun. Während der Oppositionsphase werden die Planeten dann rückläufig, d.h. sie wandern am Himmel in westlicher Richtung relativ zu den Fixsternen. Diese eigentümliche Bewegung der Planeten wurde mittels der Epizykeltheorie erklärt, in der sich die Planeten auf Kreisbahnen (Epizykel) bewegen, deren Mittelpunkte selbst auf Kreisbahnen um die Erde herum kreisen. Diese geozentrische Struktur des Planetensystems mit der Erde als Mittelpunkt des Universums war das akzeptierte Weltbild bis ins Mittelalter hinein.

Im Jahr 1609 veröffentlichte dann Johannes Kepler (1571 - 1630), zu dieser Zeit kaiserlicher Hofmathematiker in Prag, seine Überlegungen zur Bewegung der Planeten in seinem berühmten Werk "Astronomia Nova". Darin analysierte Kepler die astrometrischen Positionsdaten der scheinbaren Bewegung des Planeten Mars am Himmel, die zuvor von Tycho Brahe (1546 - 1601) mit bis dahin unerreichter Genauigkeit über viele Jahre hinweg vermessen werden konnten. Die Arbeiten von Brahe und Kepler zusammen lieferten den unumstößlichen Beweis für die Gültigkeit des zuvor von Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) beschriebenen aber erstmals bereits in der Antike formulierten heliozentrischen Weltbildes, in dem die Planeten um die Sonne herum kreisen. Darin ist die Bewegung der Planeten am Himmel nur eine scheinbare Bewegung, die sich aus dem Umlauf der Planeten zusammen mit der Erde um die Sonne herum ergibt. Im heliozentrischen Weltbild ist also auch die Erde ein Planet, der sich um die Sonne herum bewegt. Durch die Erkenntnisse Keplers änderte sich somit auch die Definition des Planetenbegriffs vom antiken Wandelgestirn des Himmels zu einem Objekt, das auf einer Umlaufbahn die Sonne umkreist. Da Merkur und Venus am Himmel nicht in Opposition zur Sonne beobachtet werden können, müssen sie folglich innerhalb der Erdbahn die Sonne umrunden, während Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun weiter außen ihre Bahnen um die Sonne ziehen. In seinem Werk Astronomie Nova beschreibt Kepler bereits zwei Gesetze der Planetenbewegung. Das 1. Kepler'sche Gesetz besagt, dass Planeten auf elliptischen Umlaufbahnen (wobei die Kreisbahn mit der Bahnexzentrizität $e = 0$ hier mit betrachtet wird) die Sonne umkreisen. Die Sonne steht dabei in einem der beiden Brennpunkte der Bahnellipse. Das 2. Kepler'sche Gesetz besagt, dass die Verbindungslinie Sonne-Planet, die auch als Fahrstrahl bezeichnet wird, in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Dies hat zur Folge, dass sich Planeten, wenn sie nahe an der Sonne stehen und der Fahrstrahl damit möglichst kurz ist, schneller auf ihrer Umlaufbahn bewegen als wenn sie weit von der Sonne entfernt stehen.

Aufgabe 1:

Leiten Sie mit dem 2. Kepler'schen Gesetz eine Beziehung für das Verhältnis $v_{\text{Perihel}} / v_{\text{Aphel}}$ zwischen den Bahngeschwindigkeiten eines Körpers auf seiner Umlaufbahn um die Sonne im Perihel (sonnennächster Bahnpunkt) und im Aphel (sonnenfernster Bahnpunkt) her. Der Körper bewegt sich auf einem elliptischen Orbit mit der großen Halbachse a und der Bahnexzentrizität e . Berechnen Sie das Geschwindigkeitsverhältnis $v_{\text{Perihel}} / v_{\text{Aphel}}$ für den Kometen 1P/Halley ($a = 17,8 \text{ AE}$, $e = 0,97$).

Kepler fand noch eine weitere wichtige Gesetzmäßigkeit der Planetenbewegung, die er 1619, dann als angestellter Mathematiker in Linz, in seinem Werk "Harmonices mundi libri V" veröffentlichte. In diesem 3. Kepler'schen Gesetz zur Planetenbewegung beschrieb Kepler den Zusammenhang zwischen den Umlaufzeiten P der Planeten um die Sonne und den großen Halbachsen a ihrer Umlaufbahnen:

$P^2 \propto a^3$ (3. Kepler'sches Gesetz der Planetenbewegung).

Mit dem 3. Kepler'schen Gesetz wurde dann erstmals auch die Dimension des Sonnensystems klar, da die Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne durch Himmelsbeobachtungen bereits sehr genau bekannt waren.

Eine wichtige Bezugsgröße in diesem Kontext ist die große Halbachse der Erdumlaufbahn, die als astronomische Einheit bezeichnet wurde. Heute wird die astronomische Einheit (AE) als festes Längenmaß von genau 149597870700 m definiert.

Aufgabe 2:

Wie lässt sich die Umlaufzeit eines Planeten um die Sonne aus der bekannten Umlaufzeit der Erde um die Sonne $P = 365,26$ Tage und der bekannten synodischen Umlaufzeit der Planeten bestimmen? Die synodische Umlaufzeit ist die aus Himmelsbeobachtungen direkt bestimmbare Zeitspanne zwischen zwei gleichen Stellungen eines Planeten am Himmel relativ zur Sonne, also z.B. die Zeit zwischen zwei Oppositionen eines äußeren Planeten. Bestimmen Sie die Umlaufzeit der Planeten um die Sonne (in Jahren) aus ihren synodischen Umlaufzeiten P_{syn} und berechnen sie damit mit dem 3. Kepler'schen Gesetz die großen Halbachsen (in AE) der Planetenumlaufbahnen.

Planet	P_{syn} [Tage]
Merkur	115,88
Venus	583,92
Mars	779,94
Jupiter	398,88
Saturn	378,09
Uranus	369,66
Neptun	367,49

Während Kepler seine Gesetze zur Planetenbewegung empirisch, also aus Beobachtungen abgeleitet hatte, entwickelte Isaac Newton (1643 - 1727) die Himmelsmechanik, um die Bewegung der Planeten um die Sonne herum theoretisch zu beschreiben und die von Kepler gefundenen Gesetze physikalisch erklären zu können. Dabei konnte er zeigen, dass neben elliptischen Umlaufbahnen auch offene parabelförmige ($e = 1$) oder sogar hyperbolische Umlaufbahnen ($e > 1$) um die Sonne herum möglich sind, wie sie zuvor auch schon durch Himmelsbeobachtungen bei Kometen nachgewiesen werden konnten. Das 1. Kepler'sche Gesetz kann also verallgemeinert werden und lautet: Die Umlaufbahnen von Himmelskörpern um die Sonne herum sind Kegelschnitte d.h. Kreise bzw. Ellipsen falls die Körper geschlossene Bahnen, Parabeln bzw. Hyperbeln falls sie nach außen offene Bahnen um die Sonne durchlaufen. Zentrales Element der Newton'schen Himmelsmechanik ist dabei die Gravitationskraft, die die Planeten auf ihre Umlaufbahnen um die Sonne zwingt.

Die Gravitationskraft wirkt zwischen zwei Massen m_1 & m_2 und nimmt quadratisch mit ihrem Abstand r ab:

$$F_G = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$$

mit der Newton'schen Gravitationskonstante $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

Die Schwerkraft ist zwar die bei weitem schwächste der vier fundamentalen Wechselwirkungen (daneben noch elektrostatische, sowie die schwache und starke Wechselwirkung), dominiert aber die großräumigsten Strukturen des Universums und ist auch für die größten Energieerzeugungen im Kosmos verantwortlich. Mit der Newton'schen Himmelsmechanik kann auch das 3. Kepler'sche Gesetz als Gleichung geschrieben werden wobei gilt:

$$P^2 / a^3 = 4\pi^2 / (G \cdot M_\odot)$$

Aus Messung der Umlaufzeit eines Objekts um einen Zentralkörper und der großen Halbachse seiner Umlaufbahn folgt damit die Masse des Zentralkörpers. Sind also die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne exakt vermessen lässt sich damit auch die Masse unseres Zentralgestirns genau bestimmen. Gleiches gilt im Übrigen auch für die Massen der Planeten, falls die Eigenschaften der Umlaufbahnen ihrer Monde exakt bekannt sind.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie aus der Umlaufzeit der Erde um die Sonne und der großen Halbachse ihrer Umlaufbahn die Masse der Sonne (in kg).

Wären die Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne aus Himmelsbeobachtungen bereits sehr genau bekannt, konnten die großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen zunächst nur relativ zur großen Halbachse der Erdumlaufbahn mittels des 3. Kepler'schen Gesetzes berechnet werden. Die große Halbachse des Erdborbits um die Sonne musste also noch bestimmt werden, was mittels astrometrischer Vermessung eines Planetentransits vor der Sonnenscheibe von zwei möglichst weit entfernten Standorten auf der Erdoberfläche möglich ist. Dabei nutzt man den Parallaxeneffekt aus, d.h. man misst den Parallaxenwinkel unter dem der Planet auf der Sonnenscheibe während des Transits Beobachtern an unterschiedlichen Standorten auf der Erdoberfläche erscheint. Da der Abstand l der Beobachtungsstandorte genau bekannt ist und der Parallaxenwinkel α direkt gemessen werden kann, folgt aus der Trigonometrie:

$$d = l / \tan(\alpha)$$

mit d als der Distanz des Planeten zur Erde während des Planetentransits.

Da beim Transit der Planet genau zwischen Sonne und Erde steht, kann mit dem 3. Kepler'schen Gesetz die genaue Distanz zwischen Planet und Erde in Vielfachen der großen Halbachse der Erdbahn berechnet werden. Die Parallaxenmessung liefert dann den Abstand zum Transitzeitpunkt in der Einheit Meter. Damit kann auch die Länge der großen Halbachse der Erdumlaufbahn (und damit ursprünglich auch die astronomische Einheit) in dieser Einheit angegeben werden. Da der Parallaxenwinkel um so größer wird je näher der Planet während des Transits an der Erde steht und so Winkelmessfehler das Ergebnis weniger stark beeinflussen können, ist unser Nachbarplanet Venus ideal für eine so wichtige astronomische Himmelsbeobachtung geeignet.

Aufgabe 4:

Wie nahe (in km) kommen sich Erde und Venus bzw. Erde und Merkur während eines Transits? Berechnen Sie daraus den maximalen Parallaxenwinkel (in Bogensekunden) unter dem Transite dieser Planeten vor der Sonnenscheibe von der Erdoberfläche aus beobachtet werden können.

Leider treten Venustransite aber nur 4-mal alle 243 Jahre (der Letzte im Jahr 2012) auf, wobei dann zwei Transite im Abstand von 8 Jahren aufeinander folgend beobachtet werden können. Aus den Venustransiten des 18. und 19. Jahrhunderts (1761, 1769 und 1874, 1882) konnte dank weltweit durchgeführter Beobachtungsexpeditionen, ausgestattet mit ausreichend präziser Messtechnik, die große Halbachse der Erdbahn auf einen Wert von 149,5 Mio. km bestimmt werden.

Beobachtungen der beiden Venustransite im 21. Jahrhundert (im Jahr 2004 und 2012) ermöglichten es dann sogar Amateurastronomen wie auch Schülern mit modernem Beobachtungsequipment die große Halbachse der Erdumlaufbahn selbst zu vermessen. Eine Wiederholung dieses Experiments wird aber erst wieder im Jahr 2117 möglich sein, wenn sich die Venus von der Erde aus betrachtet das nächste Mal vor die Sonnenscheibe schiebt.

Spektroskopische Bestimmung der Erdbahnparameter und der Sonnenmasse

Eine ganz andersartige Methode zur Bestimmung der Bahnparameter unseres Planeten ermöglicht die Spektroskopie, also die Messung der spektralen Flussdichte F_λ eines Sterns in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ . Für dieses Experiment werden Spektren eines für das verwendete Beobachtungsequipment ausreichend hellen Fixsterns über zahlreiche Beobachtungsepochen hinweg aufgenommen. Als zweithellster Stern am nördlichen Firmament ist Wega (α Lyrae), die zusammen mit Deneb (α Cygni) und Altair (α Aquilae) das bekannte Sommerdreieck bildet (siehe Abb. 2), ein ideales Zielobjekt für Beobachtungsstandorte auf der nördlichen Hemisphäre.



Abbildung 2: Himmelsaufnahme an der Universitäts-Sternwarte Jena über dem westlichen Horizont. Das Bild zeigt das Band der nördlichen Milchstraße mit seinen auffälligen Dunkelwolken sowie das Sommerdreieck, das von den hellen Sternen Wega (links), Deneb (oben) und Altair aufgespannt wird. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

Wega ist ein Einzelstern der ca. 25 LJ von der Erde entfernt steht und in etwa doppelt so massereich und dreimal so groß ist wie unser Zentralgestirn. Als Stern des Spektraltyps A0V ist Wega ein weißlich leuchtender Zwergstern, der eine Effektivtemperatur aufweist, die ca. 4000 K höher ist als die unserer Sonne. Betrachtet man das Spektrum der Wega, so fallen darin sofort die dunklen Linien der Balmer-Serie des Wasserstoffs auf (siehe Abb. 3 und 4).

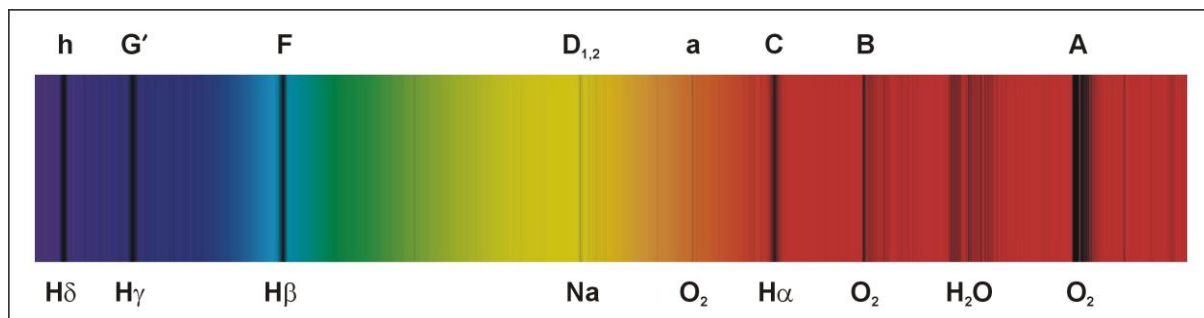


Abbildung 3: Spektrum der Wega, aufgenommen mit dem Spektrographen FLECHAS am 16.06.2015 am 90-cm-Spiegelteleskop der Universitäts-Sternwarte Jena. Die Belichtungszeit des Spektrums beträgt nur 5 s und deckt den Wellenlängenbereich zwischen 4000 (blaues Ende) und 8000 Å (rotes Ende) ab. Deutlich sind im Spektrum die starken Linien der Balmerserie des Wasserstoffs ($H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ und $H\delta$) zu erkennen, die neben den tellurischen Banden des Sauerstoffs (A, B, a) und des Wasserdampfs (H_2O) das Spektrum dominieren. Im Vergleich dazu ist im Spektrum der Wega die Doppellinie des Natriums ($D_{1,2}$) deutlich schwächer ausgeprägt. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

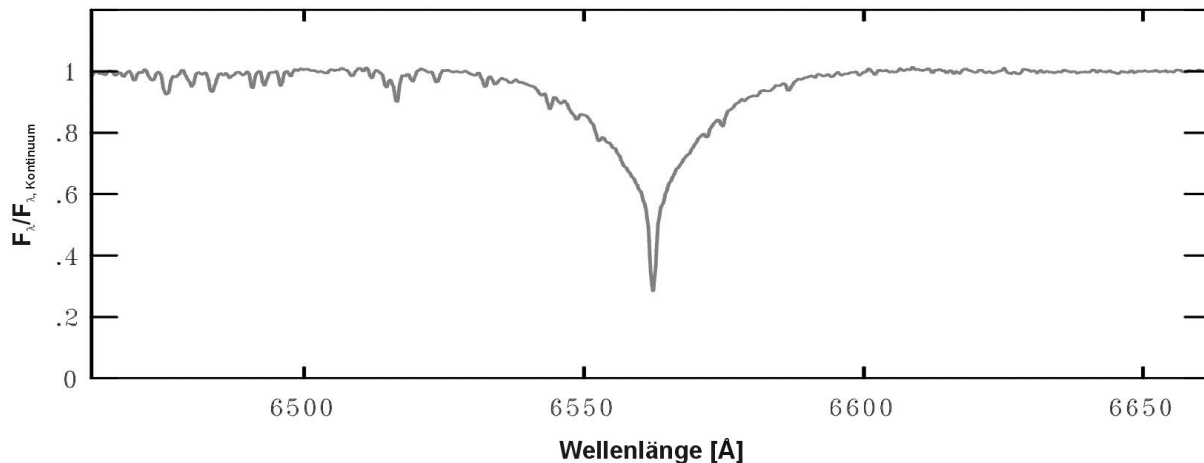


Abbildung 4: Auszug aus dem in Abbildung 2 gezeigten FLECHAS Spektrum der Wega im Wellenlängenbereich um die $H\alpha$ -Linie des Wasserstoffs. Deutlich sind die druckverbreiterten Flügel der Wasserstofflinie sowie ihr schmaler Dopplerkern zu erkennen. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

Diese Spektrallinien entstehen durch die Absorption des Lichts in der Photosphäre des Sterns durch Wasserstoffatome, wobei darin Elektronen von der zweiten Schale zu höheren Energieniveaus angeregt werden. Da die Energieniveaus im Wasserstoffatom genau bekannt sind, können auch die Wellenlängen der einzelnen Absorptionslinien genau berechnet werden und sind auch aus Labormessungen sehr präzise bekannt. Für die Laborwellenlängen der langwelligsten vier Balmerlinien gilt nach Lang (1980):

$$\lambda_0(H\alpha) = 6562,81 \text{ \AA}, \quad \lambda_0(H\beta) = 4861,34 \text{ \AA}, \quad \lambda_0(H\gamma) = 4340,48 \text{ \AA} \quad \text{und} \quad \lambda_0(H\delta) = 4101,75 \text{ \AA}.$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie mit dem Bohr'schen Atommodell die Wellenlängen (in Å) der vier langwelligsten Linien der Balmer Serie und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den gemessenen Laborwellenlängen dieser Spektrallinien.

Im Spektrum der Wega erscheinen aber die Spektrallinien etwas zu ihren Laborwellenlängen verschoben und ändern zudem ihre Position mit der Zeit. Diese Wellenlängenverschiebung der Spektrallinien wird durch die Relativbewegung des Sterns zur Sonne und der Bewegung der Erde um unser Zentralgestirn herum hervorgerufen. Genauso wie der Ton einer herannahenden Schallquelle höher klingt, als der einer sich entfernenden, bewirkt der so genannte Dopplereffekt, dass auch das Licht einer Lichtquelle blauverschoben ist, wenn diese sich dem Beobachter nähert bzw. rotverschoben ist, wenn sie sich vom Beobachter entfernt. Die Messung der Wellenlängenverschiebung der einzelnen Spektrallinien erlaubt nun die Bestimmung der Radialgeschwindigkeit des Sterns, also der Komponente seiner Relativgeschwindigkeit senkrecht zur Himmelsebene. Im Spektrum der Wega sind die markanten Balmerlinien des Wasserstoffs zur Messung des Dopplereffekts ideal geeignet, da man ihre Wellenlängen recht präzise bestimmen kann. Mit dem Dopplereffekt folgt daraus dann die Radialgeschwindigkeit v_{rad} des Sterns zu den einzelnen Beobachtungszeitpunkten:

$$v_{\text{rad}} = c \cdot (\lambda - \lambda_0) / \lambda_0$$

mit der gemessenen Wellenlänge der Spektrallinien λ , der bekannten Laborwellenlänge der Spektrallinien λ_0 und der Lichtgeschwindigkeit $c = 299790 \text{ km/s}$.

Aufgabe 6:

Welche maximale Wellenlängenverschiebung (in Å) im Spektrum eines Fixsterns erwarten Sie für die H α -Linie des Wasserstoffs bedingt durch die Bewegung der Erde um die Sonne herum? Berechnen Sie dazu zunächst die Bahngeschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne (in km/s).

In Tab. 1 sind Messungen der Radialgeschwindigkeiten der Wega aufgelistet, die im Rahmen einer Forschungsarbeit von Hannes Keppler von der Landesschule Pforta aus der Analyse von Spektren des Sterns abgeleitet wurden, die mit dem fasergekoppelten Échelle-Spektrograph FLECHAS (Fiber Linked EChelle Astronomical Spectrograph, siehe Mugrauer et al. 2014) am 90-cm-Spiegelteleskop der Universitäts-Sternwarte Jena aufgenommen wurden.

Zeit [Tage]	v_{rad} [km/s]	Zeit [Tage]	v_{rad} [km/s]	Zeit [Tage]	v_{rad} [km/s]	Zeit [Tage]	v_{rad} [km/s]
0,00000	-13,582	227,22703	-24,478	332,95192	-21,038	648,10263	-28,510
5,94431	-12,339	243,17656	-27,469	333,95285	-21,033	653,00367	-27,593
6,92931	-12,160	281,18293	-28,284	339,93844	-20,581	666,98646	-26,536
7,93505	-11,786	287,12285	-28,268	340,94104	-19,678	681,00402	-24,535
7,93938	-11,853	288,02291	-27,890	343,10028	-19,094	692,95538	-21,730
8,95000	-11,598	294,10687	-26,721	343,96465	-18,600	694,92922	-22,060
9,96087	-11,468	307,03527	-25,790	369,93681	-12,590	695,94647	-21,776
12,94645	-10,945	310,06486	-24,824	373,93455	-11,253	700,91725	-20,541
13,94691	-10,802	315,96760	-24,699	377,92788	-10,911	703,95582	-20,240
15,96753	-9,909	316,89600	-24,038	481,82752	-1,735	705,96907	-20,318
20,96090	-8,451	330,95674	-21,631	639,05942	-28,440	706,95953	-19,533
21,93490	-8,548	331,95855	-21,249	639,19911	-28,096		

Tabelle 1: Messungen der Radialgeschwindigkeit des Sterns Wega, die mit dem Échelle-Spektrographen FLECHAS am 90-cm-Spiegelteleskop der Universitäts-Sternwarte Jena aufgenommen wurden. Die typische Ungenauigkeit der einzelnen Messungen beträgt 0,3 km/s. Die Messwerte sind in Abb. 5 dargestellt.

Im Rahmen des Forschungsprojektes konnten insgesamt 47 Spektren der Wega ausgewertet und analysiert werden, die an der Universitäts-Sternwarte Jena in einem Zeitraum von knapp 2 Jahren aufgenommen wurden. Die Spektren weisen eine spektrale Auflösungsstärke von $R = \Delta\lambda/\lambda \sim 9300$ im Wellenlängenbereich zwischen 4000 und 8000 Å auf und wurden jeweils nur wenige Sekunden lang belichtet. Die Reduktion und Analyse der FLECHAS Spektren erfolgte mit einer speziell für den Spektrographen geschriebenen Software.

Trägt man nun die ermittelten Radialgeschwindigkeiten der Wega aus Tab. 1 über die Zeit auf, so erhält man eine interessante Kurve, die in Abb. 5 dargestellt ist.

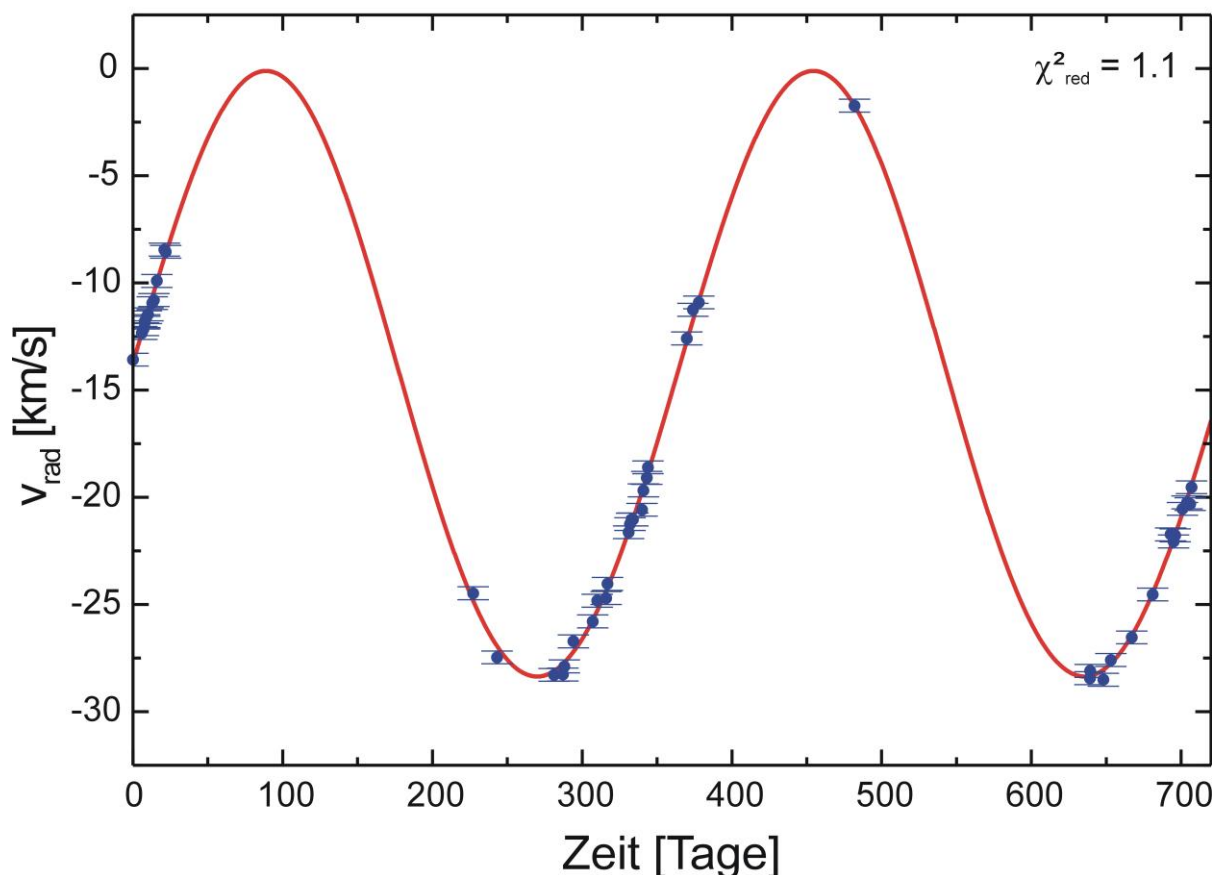


Abbildung 5: Messungen der Radialgeschwindigkeit des Sterns Wega, aufgenommen mit dem Échelle-Spektrographen FLECHAS an der Universitäts-Sternwarte Jena. Über einen Zeitraum von knapp 2 Jahren konnten insgesamt 47 Messwerte aufgenommen werden, die im Diagramm als blaue Punkte dargestellt sind. Die rote Linie zeigt die Radialgeschwindigkeitskurve, die an die einzelnen Messdaten durch Minimierung der quadratischen Abweichungen angepasst wurde. (© Markus Mugrauer & Hannes Kepler)

Die Radialgeschwindigkeit des Sterns schwankt dabei periodisch um einen Mittelwert. Diese Variation kommt durch die Bewegung der Erde um die Sonne herum zustande, bei der sich unser Planet einmal auf den Stern zu bewegt und sich dann wieder von ihm entfernt. Funktional lässt sich diese zeitliche Variation der Radialgeschwindigkeit beschreiben:

$$v_{\text{rad}} = K \cdot [\cos(\nu + \omega) + e \cdot \omega] + \gamma$$

mit K als der projizierten Erdbahngeschwindigkeit in Richtung der Wega, γ als der Geschwindigkeit des Sterns relativ zur Sonne (die so genannte stellare Radialgeschwindigkeit), e als der Exzentrizität der Erdumlaufbahn um die Sonne, ω als der Länge des Perizentrums der scheinbaren parallaktischen Umlaufbahn des Sterns am Himmel, bedingt durch die Bewegung der Erde um die Sonne, sowie ν als der wahren Anomalie des Sterns auf seiner scheinbaren Umlaufbahn (wie in Abb. 6 & 7 illustriert).

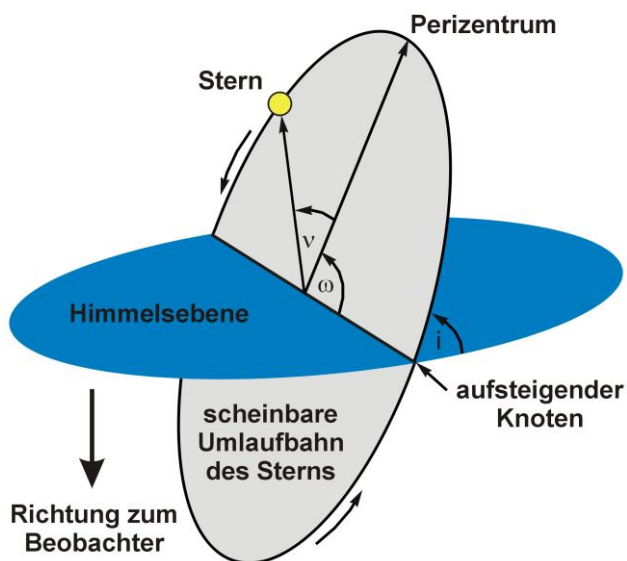


Abbildung 6: Scheinbare parallaktische Bewegung des Sterns bedingt durch die Bewegung der Erde um die Sonne herum. Die scheinbare Umlaufbahn des Sterns ist dabei parallel zur Umlaufbahnebene der Erde (Ekliptik) orientiert und gegen die Himmelsebene um den Inklinationwinkel $i = 90^\circ - \beta$ geneigt, mit β der ekliptikalen Breite des Sterns. Die Umlaufbahn des Sterns schneidet die Himmelsebenen in einer Knotenlinie. Der Knotenpunkt an dem der Stern scheinbar in den Himmel aufsteigt wird als aufsteigender Knoten bezeichnet. Vom aufsteigenden Knoten aus der Bewegungsrichtung des Sterns folgend wird die Lage des Perizentrums der Umlaufbahn des Sterns durch den Winkel ω , der Länge des Perizentrums, definiert. Die aktuelle Position des Sterns auf der Umlaufbahn wird durch die wahre Anomalie ν des Sterns beschrieben.
(© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

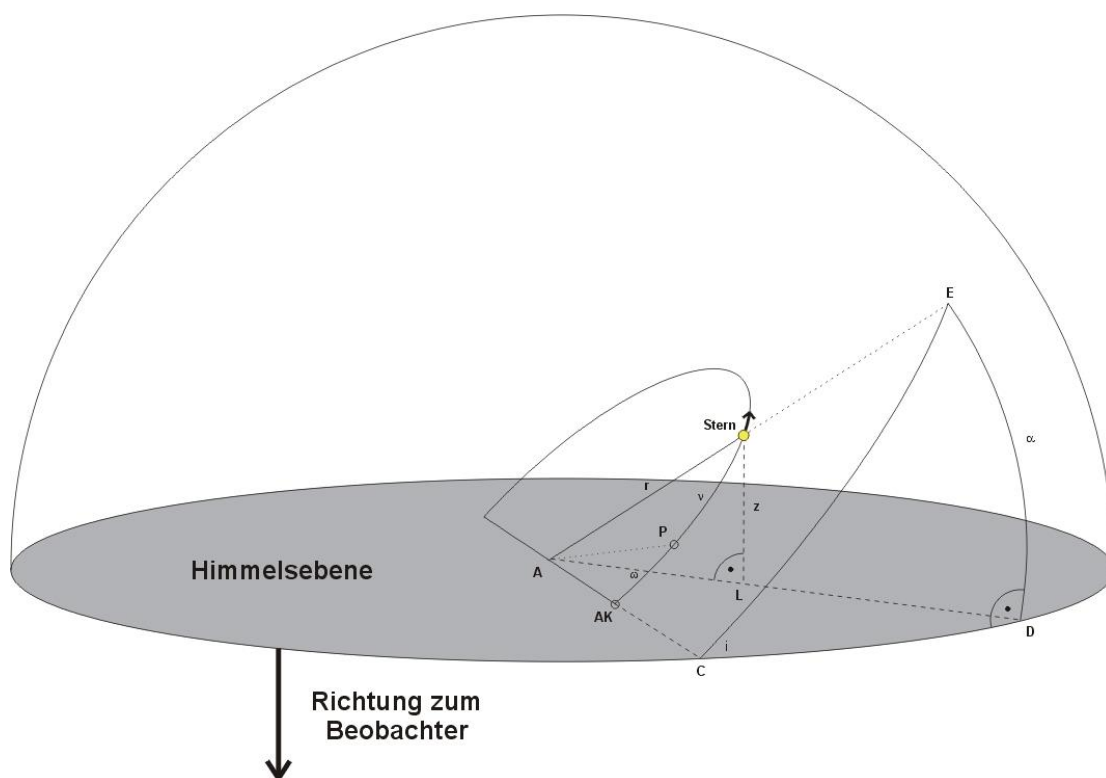


Abbildung 7: Die messbare Radialgeschwindigkeit v_{rad} des Sterns ergibt sich aus der zeitlichen Änderung seiner Position in radialer Richtung z (also senkrecht zur Himmelsebene) und der stellaren Radialgeschwindigkeit γ des Sterns: $v_{\text{rad}} = dz/dt + \gamma$. Der Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten AK und dem Perizentrum P ist die Länge des Perizentrums ω . Der Winkel zwischen Perizentrum und Stern ist die wahre Anomalie ν des Sterns auf seiner Umlaufbahn. Trigonometrisch folgt, dass im Dreieck zwischen dem Punkt A, dem Lotpunkt auf die Himmelsebene L und dem Stern gilt: $z = r \cdot \sin(\alpha)$. Im sphärischen Dreieck CDE auf einem Kreis um A gilt nach dem Sinussatz der sphärische Trigonometrie: $\sin(\alpha) / \sin(i) = \sin(\nu + \omega) / \sin(90^\circ) \rightarrow \sin(\alpha) = \sin(\nu + \omega) \cdot \sin(i) \rightarrow z = r \cdot \sin(\nu + \omega) \cdot \sin(i)$. Durch Differentiation und Umformung folgt daraus schließlich: $v_{\text{rad}} = K \cdot [\cos(\nu + \omega) + e \cdot \omega] + \gamma$. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

Gleicht man nun die obige Funktion der Radialgeschwindigkeit v_{rad} an die Messpunkte durch Minimierung der quadratischen Abweichungen (rote Kurve in Abb. 5) an, so erhält man die stellare Radialgeschwindigkeit des Sterns sowie die einzelnen Parameter der Erdumlaufbahn. Aus dem Fit der Messdaten, der hier mit der Software *Spectroscopic Binary Solver* (Johnson 2004) durchgeführt wurde, folgt insbesondere:

$$P = 365,7 \pm 0,5 \text{ Tage}, K = 14,18 \pm 0,15 \text{ km/s}, \gamma = -14,41 \pm 0,12 \text{ km/s} \text{ und } e = 0,014 (-0,009/+0,011).$$

Die ermittelte stellare Radialgeschwindigkeit der Wega γ stimmt dabei innerhalb der Messgenauigkeit sehr gut mit Literaturwerten, z.B. $\gamma = -14,4 \pm 1,9 \text{ km/s}$ (Kearsley & Wegner 1978), überein. Auch die spektroskopisch bestimmte Umlaufperiode unseres Planeten um die Sonne entspricht innerhalb des Messfehlers dem bekannten Wert für das sidirische Jahr von 365,256 Tagen. Die prozentuale Abweichung beträgt hier nur 0,1 %!

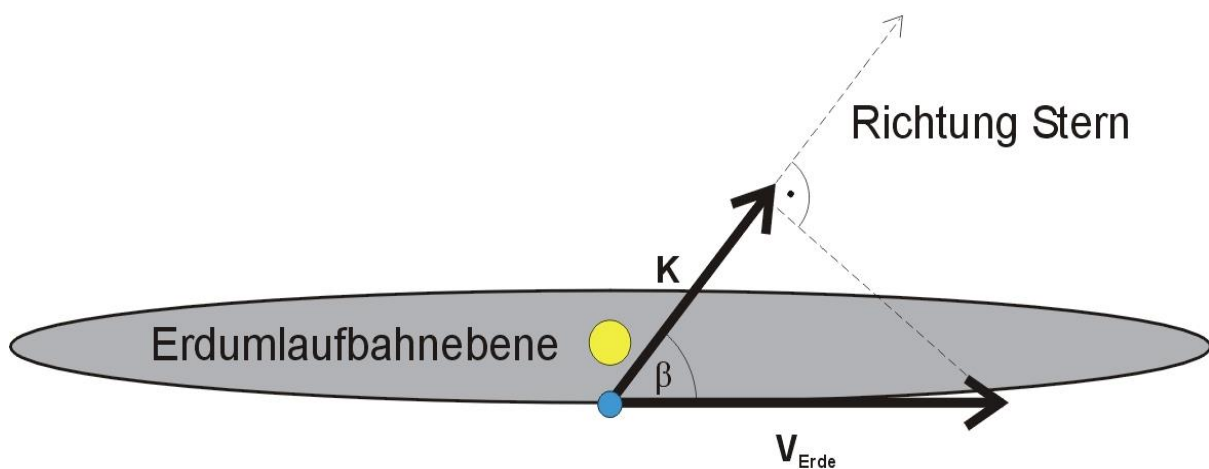


Abbildung 8: Geometrischer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne v_{Erde} und der projizierten Bahngeschwindigkeit K in Richtung des beobachteten Sterns. Aus der Trigonometrie folgt: $K = \cos(\beta) \cdot v_{\text{Erde}}$. (© Markus Mugrauer & Hannes Keppler).

Aus der spektroskopisch gemessenen projizierten Bahngeschwindigkeit der Erde in Richtung Wega K kann nun die mittlere Bahngeschwindigkeit v_{Erde} unseres Planeten um die Sonne herum berechnet werden (siehe Abb. 8):

$$v_{\text{Erde}} = K / \cos(\beta)$$

mit der ekliptikalen Breite β des Sterns, die aus seinen äquatorialen Koordinaten (α, δ) und der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23,5^\circ$ leicht berechnet werden kann (wie in Abb. 9 illustriert):

$$\sin(\beta) = \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\delta) - \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha)$$

Mit den äquatorialen Koordinaten der Wega: $\alpha = 18\text{h } 36\text{m } 56\text{s}$ und $\delta = 38^\circ 47' 1''$

ergibt sich: $\beta = 61,79^\circ$

und damit: $v_{\text{Erde}} = 30,0 \pm 0,3 \text{ km/s}$.

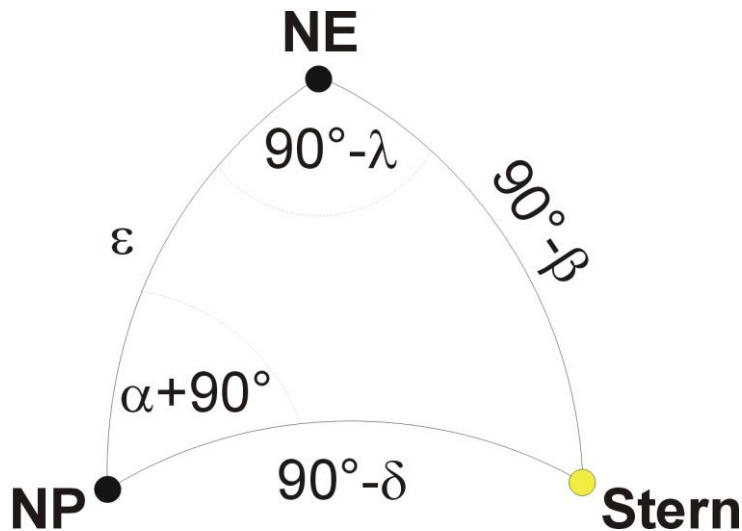


Abbildung 9: Sphärisches Dreieck, aufgespannt zwischen dem Nordpol des äquatorialen (NP) und des ekliptikalen (NE) Koordinatensystems sowie des beobachteten Sterns mit den äquatorialen (α , δ) und den ekliptikalen Koordinaten (λ , β). Der Winkelabstand zwischen den beiden Polen der Koordinatensysteme entspricht der Schiefe der Ekliptik ϵ . Mit dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie ergibt sich:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(\epsilon) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(\epsilon) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos(\alpha + 90^\circ).$$

Damit folgt schließlich: $\sin(\beta) = \cos(\epsilon) \cdot \sin(\delta) - \sin(\epsilon) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha)$.

Die spektroskopisch bestimmte mittlere Bahngeschwindigkeit unseres Planeten v_{Erde} stimmt dabei mit dem bekannten Literaturwert von 29,8 km/s innerhalb der erreichten Messgenauigkeit sehr gut überein. Die prozentuale Abweichung beträgt hier nur 0,7 %!

Für die Bahnexzentrizität der Erde liefert die spektroskopische Analyse einen Wert von $e = 0,014$, also einen annähernd kreisförmigen Orbit. Die spektroskopisch bestimmte Bahnexzentrizität unseres Planeten ist dabei unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit mit dem bekannten Literaturwert der Erdbahnexzentrizität ($e = 0,017$) konsistent.

Aus der Umlaufperiode P und der mittleren Bahngeschwindigkeit der Erde können wir nun auch noch die große Halbachse a der Umlaufbahn unseres Planeten um die Sonne herum ermitteln. Dabei nehmen wir nun einen exakt kreisförmigen Erdorbit an, für den geometrisch dann einfach gilt:

$$v_{\text{Erde}} = 2\pi \cdot a / P.$$

Mit der spektroskopisch bestimmten Umlaufperiode P und der mittleren Bahngeschwindigkeit der Erde v_{Erde} folgt für die große Halbachse ihrer Umlaufbahn:

$$a = v_{\text{Erde}} \cdot P / 2\pi = 150,9 \pm 1,7 \text{ Mio. km.}$$

Auch dieses Ergebnis stimmt wieder innerhalb des Messfehlers sehr gut mit dem bekannten Literaturwert der astronomischen Einheit von 149,6 Mio. km überein. Die prozentuale Abweichung liegt hier nur bei 0,9 %!

Unter Anwendung des 3. Kepler'schen Gesetzes der Planetenbewegung folgt für die Sonnenmasse:

$$M_{\odot} = 4\pi^2 \cdot a^3 / (P^2 \cdot G) = (2\pi \cdot a / P)^2 \cdot a / G$$

und für eine kreisförmige Erdumlaufbahn gilt dann einfach: $M_{\odot} = v_{\text{Erde}}^2 \cdot a / G$.

Mit der spektroskopisch gemessenen Umlaufzeit der Erde um die Sonne P und der bestimmten mittleren Bahngeschwindigkeit unseres Planeten v_{Erde} erhalten wir schließlich für die Sonnenmasse:

$$M_{\odot} = (2,04 \pm 0,05) \cdot 10^{30} \text{ kg,}$$

was gut mit dem bekannten Literaturwert ($M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) übereinstimmt (prozentuale Abweichung von ca. 2,6 %).

Das durchgeführte Experiment zeigt eindrucksvoll mit welcher Genauigkeit aus spektroskopischen Messungen neben der stellaren Radialgeschwindigkeit von Sternen insbesondere auch die Bahnparameter unserer Erde sowie die Masse unseres Zentralgestirns indirekt abgeleitet werden können. Dabei ermöglicht die Spektroskopie die Bestimmung der Erdbahnparameter (anders als die Analyse von Planetentransiten) zu jedem beliebigen Zeitpunkt, da ja Sterne in jeder klaren Nacht spektroskopiert werden können. Da die beobachtbare Variation der Radialgeschwindigkeit von Einzelsternen durch die Bewegung der Erde um die Sonne herum hervorgerufen wird, kann sich so zudem jeder Himmelsbeobachter selbst von der Gültigkeit des heliozentrischen Weltbildes mittels eigener spektroskopischer Messungen überzeugen.

Literatur

Kearsley A. J. & Wegner G.
Atmospheric analyses of southern peculiar A stars
1978, MNRAS 182, 117

Johnson D. O.
Spectroscopic Binary Solver
2004, JAD 10, 3

Lang K. R.
Astrophysical Formulae. A Compendium for the Physicist and Astrophysicist.
1980, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-09933-6; ISBN 0-387-09933-6

Mugrauer M., Avila G., Guirao C.
FLECHAS - A new échelle spectrograph at the University Observatory Jena
2014, AN 335, 417

Referenz für die verwendeten bekannten Werte der Erdumlaufbahn P , e , a , der Sonnenmasse sowie von den Naturkonstanten G und c :

Unsöld A., Baschek B.
Der neue Kosmos
1999, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-64165-3

Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1

Das 2. Kepler'sche Gesetz besagt, dass der Fahrstrahl eines Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Im Perihel bzw. Aphel überstreicht der Fahrstrahl pro Zeiteinheit dA die Fläche:

$$dA = 0,5 \cdot r_{\text{Perihel/Aphel}} \cdot v_{\text{Perihel/Aphel}} \cdot dt.$$

Für das Geschwindigkeitsverhältnis folgt damit mit dem 2. Kepler'schen Gesetz:

$$v_{\text{Perihel}} / v_{\text{Aphel}} = r_{\text{Aphel}} / r_{\text{Perihel}} = (1+e) / (1-e).$$

Für 1P/Halley ergibt dies:

$$v_{\text{Perihel}} / v_{\text{Aphel}} = 65,7.$$

Zu Aufgabe 2

Die Frequenz $1/P_{\text{syn}}$, mit der ein Planet von der Erde aus in einer bestimmten Stellung zur Sonne beobachtet werden kann, berechnet sich einfach zu:

$$1/P_{\text{syn}} = |1/P_{\text{Planet}} - 1/P|$$

mit P_{Planet} und P den Umlaufzeiten des Planeten und der Erde um die Sonne.

Für einen inneren Planeten ergibt sich damit: $1/P_{\text{Planet}} = 1/P + 1/P_{\text{syn}}$

und für einen äußeren entsprechend: $1/P_{\text{Planet}} = 1/P - 1/P_{\text{syn}}$.

Mit dem 3. Kepler'schen Gesetz folgt daraus: $a_{\text{Planet}} \propto P_{\text{Planet}}^{2/3}$.

Planet	P_{syn} [Tage]	P_{Planet} [Jahre]	a [AE]
Merkur	115,88	0,241	0,39
Venus	583,92	0,615	0,72
Mars	779,94	1,88	1,5
Jupiter	398,88	11,9	5,2
Saturn	378,09	29,5	9,5
Uranus	369,66	84,0	19,2
Neptun	367,49	165	30,0

Zu Aufgabe 3

Das 3. Kepler'sche Gesetz lautet in Newton'scher Formulierung:

$$P^2 / a^3 = 4\pi^2 / (G \cdot M_{\odot})$$

Daraus folgt mit $P = 365,26$ Tagen und $a = 149.597.870.700$ m:

$$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Zu Aufgabe 4

Mit $a_{\text{Merkur}} = 0,39 \text{ AE}$ und $a_{\text{Venus}} = 0,72 \text{ AE}$ (wie in der zweiten Aufgabe berechnet wurde) folgt für die Minimalabstände der Planeten zur Erde während der Transite:

$$d_{\text{Merkur}} = (1 - 0,39) \text{ AE} = 0,61 \text{ AE} \text{ bzw. } d_{\text{Venus}} = 0,28 \text{ AE} \text{ entsprechend: } 91,3 \text{ bzw. } 41,9 \text{ Mio. km.}$$

Mit dem Erddurchmesser von ca. $l = 12800 \text{ km}$ ergibt dies einen maximalen Parallaxenwinkel α von: $\alpha = \arctan(l/d) \rightarrow a_{\text{Merkur}} = 29''$ und $a_{\text{Venus}} = 63''$.

Zu Aufgabe 5

Für die Energieniveaus der einzelnen Schalen im Bohr'schen Atommodell gilt:

$$E_n = -E_0 / n^2$$

mit E_0 der Rydbergenergie. Für die Energien der Übergänge der Balmer Serie ($n = k \rightarrow 2$) folgt damit:

$$\Delta E = E_k - E_2 = E_0 \cdot (1/4 - 1/k^2)$$

mit der natürlichen Zahl k , wobei $k > 2$ gilt.

Für die Wellenlänge der emittierten e-m-Strahlung gilt:

$$\lambda = h \cdot c / \Delta E$$

mit der Planck-Konstante h .

Für die Wellenlängen der vier langwelligsten Balmerlinien folgt daraus:

k	$\lambda_{\text{calc}} [\text{\AA}]$	$\lambda_{\text{lab}} [\text{\AA}]$	$\Delta\lambda [\text{\AA}]$
3	6561,12	6562,81	1,69
4	4860,09	4861,34	1,25
5	4339,37	4340,48	1,11
6	4100,70	4101,75	1,05

Mit unter 0,1 % prozentualer Abweichung eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten.

Zu Aufgabe 6

Mit $P = 365,26 \text{ Tage}$ und $a = 1 \text{ AE}$ folgt:

$$v_{\text{Erde}} = 2\pi a / P = 29,8 \text{ km/s.}$$

Für einen Stern auf der Ekliptik ergibt dies eine max. Wellenlängenverschiebung der H α -Linie von:

$$\Delta\lambda = \pm\lambda_0 \cdot v_{\text{Erde}}/c = 0,65 \text{ \AA.}$$

Insgesamt kann also, bedingt durch die Erdrotation um die Sonne herum, eine Wellenlängenverschiebung von **bis zu 1,3 \AA** beobachtet werden.