

## Lösungen

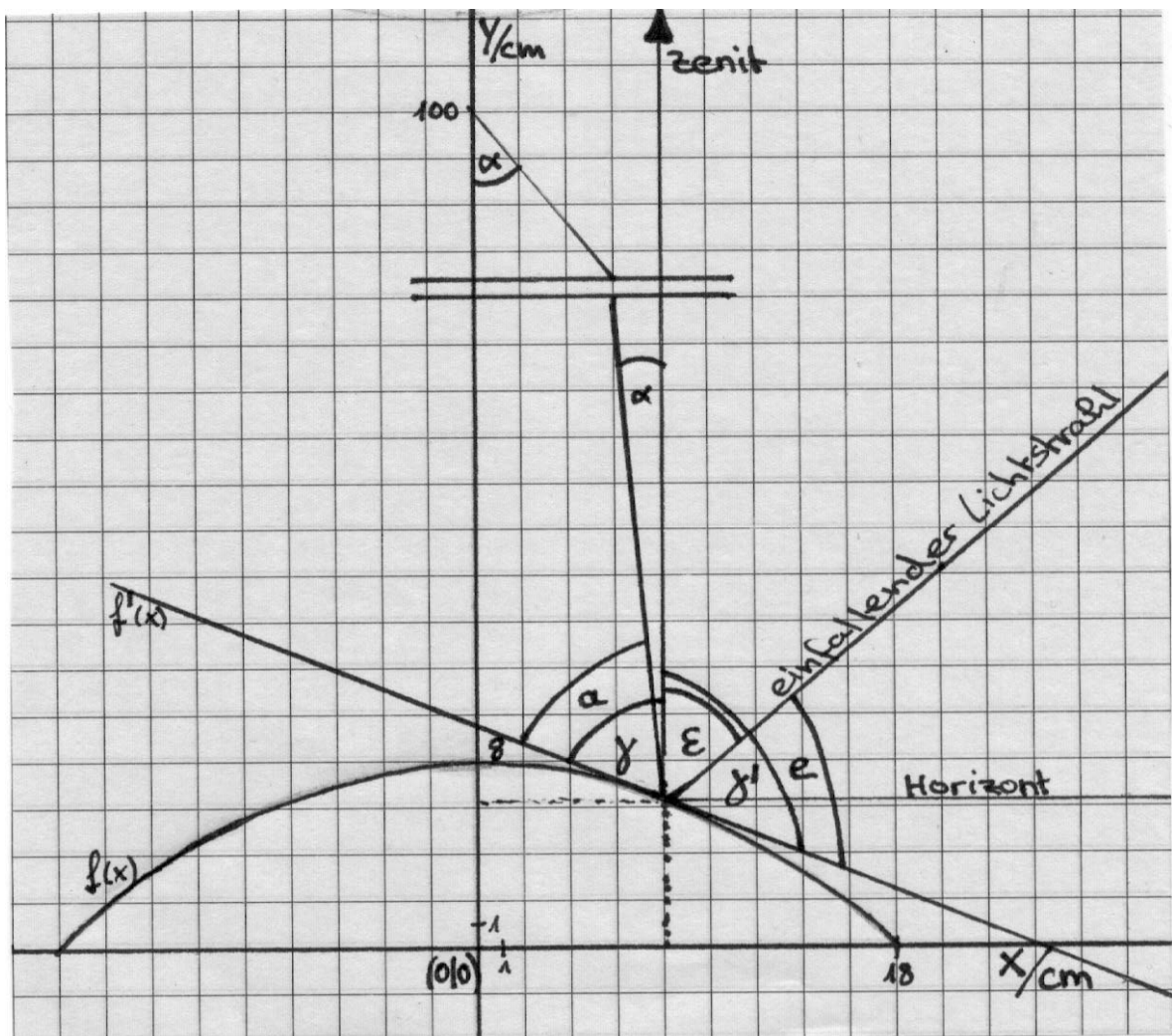
### Aufgabe 1

- a) Da die Kamera einen Parabolspiegel fotografiert, folgt der mittlere Querschnitt des Spiegels einer quadratischen Funktion der Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  und, weil man den Scheitelpunkt der Funktion geschickter Weise auf die y-Achse setzen kann:  
 $f(x) = ax^2 + c$ .

Es sind die drei Punkte  $(-18|0)$   $(0|8)$  und  $(18|0)$  bekannt. Daraus folgt die Funktionsgleichung  $f(x) = -\frac{2}{81}x^2 + 8$

b)  $f'(x) = -\frac{4}{81}x$

- c) d)



$$e) \quad \tan \alpha = \frac{x}{100 - f(x)} \quad \text{oder} \quad \alpha = \arctan \frac{x}{100 - f(x)}$$

$$f) \quad e = a = \gamma - \alpha$$

$$e = a = 90^\circ - \arctan f'(x) - \arctan \frac{x}{100 - f(x)}$$

$$g) \quad \varepsilon = \gamma' - e$$

$$\varepsilon = 90^\circ + \arctan f'(x) - (90^\circ - \arctan f'(x) - \arctan \frac{x}{100 - f(x)})$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \arctan f'(x) + \arctan \frac{x}{100 - f(x)}$$

Weil sich auch für  $x > 0$  positive Winkel ergeben müssen um die Summanden jeweils Betragsstriche:

$$\text{Zenitdistanz:} \quad \varepsilon = \left| 2 \cdot \arctan \left( -\frac{4}{81} \cdot x \right) \right| + \left| \arctan \frac{x}{100 + \frac{2}{81} \cdot x^2 - 8} \right|$$

$$a) \quad \text{Der Azimut des Anfangspunktes beträgt etwa: } Az_A \approx 360^\circ - 25^\circ = 335^\circ$$

$$\text{Der Azimut des Endpunktes beträgt etwa: } Az_E \approx 360^\circ - 7^\circ = 353^\circ$$

$$x_A \approx 0,66 \cdot 18 \text{cm}$$

$$x_E \approx 0,85 \cdot 18 \text{cm}$$

Aus  $x_A$  und  $x_E$  lassen sich mit der Formel aus g) die Zenitdistanzen berechnen zu:

$$\varepsilon_A \approx 67,8^\circ \text{ und}$$

$$\varepsilon_E \approx 82,8^\circ .$$

## Aufgabe 2

- a) Aus dem Seiten-Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie folgt:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos \varepsilon + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos(180^\circ - Az)$$

$$\text{oder: } \sin \delta = \sin \varphi \cdot \cos \varepsilon + \cos \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos(180^\circ - Az).$$

In dem konkreten Beispiel heißt das:

$$\sin \delta_A = \sin 48,41^\circ \cdot \cos 59,54^\circ + \cos 48,41^\circ \cdot \sin 59,54^\circ \cdot \cos(180^\circ - 331,83^\circ) = -0,125$$

$$\delta_A = \arcsin(-0,125) = -7,2^\circ$$

$$\sin \delta_E = \sin 48,41^\circ \cdot \cos 81,55^\circ + \cos 48,41^\circ \cdot \sin 81,55^\circ \cdot \cos(180^\circ - 352,73^\circ) = -0,54$$

$$\delta_E = \arcsin(-0,54) = -32,78^\circ$$

- b) Der Stundenwinkel lässt sich danach berechnen durch:

$$\cos \varepsilon = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t$$

$$\text{Oder: } \cos \varepsilon = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$\text{Daraus folgt: } \cos t = \frac{\cos \varepsilon - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

Das heißt wiederum im konkreten Beispiel für  $t_A$  und  $t_E$ :

$$\cos t_A = \frac{\cos 59,54^\circ - \sin 48,41^\circ \cdot \sin(-7,2^\circ)}{\cos 48,41^\circ \cdot \cos(-7,2^\circ)} = 0,912$$

$$t_A = \arccos(0,912) = \pm 24,22^\circ$$

$$\cos t_E = \frac{\cos 81,55^\circ - \sin 48,41^\circ \cdot \sin(-32,78^\circ)}{\cos 48,41^\circ \cdot \cos(-32,78^\circ)} = 0,989$$

$$t_E = \arccos(0,989) = \pm 8,56^\circ$$

- c)  $\alpha = \Theta - t'$

$$\alpha = \Theta - t \cdot \frac{1}{15} = 10,0453\text{h} - t \cdot \frac{1\text{h}}{15^\circ}$$

Für  $\alpha_A$  und  $\alpha_B$  heißt das:

$$\alpha_A = 10,0453\text{h} - (-24,22^\circ) \cdot \frac{1\text{h}}{15^\circ} = 11,66\text{h} = 11\text{h}39\text{m}36\text{s} = 174,9^\circ$$

$$\alpha_E = 10,0453\text{h} - (-8,56^\circ) \cdot \frac{1\text{h}}{15^\circ} = 10,616\text{h} = 10\text{h}36\text{m}57\text{s} = 159,2^\circ$$

### Aufgabe 3

a)  $r_{\text{Streitheim}} \approx 6366,20\text{km}$

b) 
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} (r_p + h_p) \cdot \cos \varphi'_p \cdot \cos \zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \cos \varphi'_p \cdot \sin \zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \sin \varphi'_p \end{pmatrix}$$

Das P steht für einen beliebigen Punkt auf der Erdoberfläche.

c) 
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} (6366,2 + 0,504) \cdot \cos 48,41 \cdot \cos 150,68^\circ \\ (6366,2 + 0,504) \cdot \cos 48,41 \cdot \sin 150,68^\circ \\ (6366,2 + 0,504) \cdot \sin 48,41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3684,79 \\ 2069,54 \\ 4761,75 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 4

$$a) \quad E_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} (r_K + h_K) \cdot \cos \varphi'_K \cdot \cos \zeta_K \\ (r_K + h_K) \cdot \cos \varphi'_K \cdot \sin \zeta_K \\ (r_K + h_K) \cdot \sin \varphi'_K \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_A \cdot \cos \delta_A \\ \sin \alpha_A \cdot \cos \delta_A \\ \sin \delta_A \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_E \cdot \cos \delta_E \\ \sin \alpha_E \cdot \cos \delta_E \\ \sin \delta_E \end{pmatrix}$$

Dabei steht K für „Kamera“, A für „Anfang der Spur“ und E für „Ende der Spur“

$$b) \quad E_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3684,79 \\ 2069,54 \\ 4761,75 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos 174,9^\circ \cdot \cos(-7,2^\circ) \\ \sin 174,9^\circ \cdot \cos(-7,2^\circ) \\ \sin(-7,2^\circ) \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \cos 159,2^\circ \cdot \cos(-32,78^\circ) \\ \sin 159,2^\circ \cdot \cos(-32,78^\circ) \\ \sin(-32,78^\circ) \end{pmatrix}$$

$$E_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3684,79 \\ 2069,54 \\ 4761,75 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0,9882 \\ 0,0882 \\ -0,125 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0,786 \\ 0,2986 \\ -0,541 \end{pmatrix}$$

- c) Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren der Ebene entspricht dem Normalenvektor der Ebene:

$$\begin{pmatrix} -0,9882 \\ 0,0882 \\ -0,125 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,786 \\ 0,2986 \\ -0,541 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0104 \\ -0,4364 \\ -0,2258 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Koordinatenform der Ebene:

$$-0,0104x - 0,4364y - 0,2258z = -1940,03$$

- d) Die Koordinatenformen der beiden Ebenen aus den Werten der Kamerastationen Streiheim und Tuifstätt bilden ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{cases} -0,0104x - 0,4364y - 0,2258z = -1940,03 \\ -1,33 \cdot 10^{-5}x - 0,366y - 0,1656z = -1548,015 \end{cases}$$

$$x = 9076,796 - 2,73\sigma$$

$$y = 4229,219 - 0,452\sigma$$

$$z = \sigma$$

Daraus folgt die Schnittgerade:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  mit  $r = r_{\text{Erde}} + 15\text{km}$

Durch Einsetzen folgt:

$$(6366\text{km} + 15\text{km})^2 = (9076,796 - 2,73\sigma)^2 + (4229,219 - 0,452\sigma)^2 + \sigma^2$$

$$0 = 8,657\sigma^2 - 53382,52\sigma + 59557357,98$$

$$\sigma_1 = 4703,67$$

$$\sigma_2 = 1462,584$$

Durch Einsetzen von  $\sigma$  in  $\bar{g}$  erhalten wir die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel:

$$Q_1 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + 4703,67 \begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix}$$

Oder:

$$Q_2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + 1462,584 \begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5083,94 \\ 3568,13 \\ 1462,584 \end{pmatrix}$$

$Q_1$  ist der gesuchte Punkt, weil dessen Koordinaten denen der Kamerastationen ähnlich sind und damit auf der richtigen Seite der Erdkugel liegen.

f)  $\overline{MQ} = \rho \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix}$

Durch Einsetzen von  $\overline{MQ}$  in  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  mit  $r = r_{\text{Erde}}$  erhalten wir den Submeteorpunkt auf dem Erdboden:

$$6366^2 = (-3764,22\rho)^2 + (2103,16\rho)^2 + (4703,67\rho)^2$$

$$\rho_1 = -0,9976$$

$$\rho_2 = 0,9976$$

Man kann sofort sehen, dass  $\rho_2$  der gesuchte Wert ist, weil dieser  $\overline{MQ}$  nur leicht verändert, während  $\rho_1$  alle Vorzeichen vertauschen würde. So er gibt sich S:

$$S : \bar{x} = 0,9976 \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3755,19 \\ 2098,11 \\ 4692,38 \end{pmatrix}$$

g) S hat wie jeder Punkt P auf der Erde die Koordinaten  $\vec{p} = \begin{pmatrix} (r_p + h_p) \cdot \cos \varphi'_p \cdot \cos \zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \cos \varphi'_p \cdot \sin \zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \sin \varphi'_p \end{pmatrix}$ .

$(r_p + h_p)$  ist hier der in f) vorausgesetzte Erdradius (6366km).

$$\begin{pmatrix} -3755,19 \\ 2098,11 \\ 4692,38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6366) \cdot \cos \varphi' \cdot \cos \zeta \\ (6366) \cdot \cos \varphi' \cdot \sin \zeta \\ (6366) \cdot \sin \varphi' \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die geographische Breite:

$$\varphi' = \arcsin \frac{4692,38}{6366} = 47,485^\circ$$

Und für lokale Sternzeit:

$$\zeta = \arccos\left(\frac{-3755,19}{6366 \cdot \cos 47,485}\right) = 150,796^\circ = 10,05306\text{h} = 10\text{h}03\text{m}1\text{s}$$

Die geographische Länge L lässt sich dann berechnen als

$$L = (\zeta - \text{GMST}) \cdot \frac{360^\circ}{23,93447\text{h}} \text{ mit GMST=Greenwich Mean Star Time}$$

$$L = (10,05306 - 9,33451) \cdot \frac{360^\circ}{23,93447\text{h}} = 10,80777^\circ$$

Der Punkt bei  $47,485^\circ$  nördlicher Breite und  $10,80777^\circ$  östlicher Länge liegt am Plansee in Nordtirol und nur etwa 10km entfernt vom Schloss Neuschwanstein, nach dem der Meteorit benannt wurde.