Die Lagrange-Punkte – mehr als nur Lösungen einer Differentialgleichung

Natalie Fischer

Wir würden noch viel mehr über den Weltraum lernen, wäre es nur möglich, einen Satelliten bewegungslos im Weltraum zu positionieren. Er könnte dann Änderungen der magnetischen Feldstärke oder den Partikelfluss an einer festen Stelle messen. Aber das ist unmöglich! Um wirklich an einer Stelle „stehen“ zu bleiben, müsste ein Satellit nämlich ständig „in Bewegung“ sein. Nur so könnte er sämtlichen gravitativen Einflüssen seiner Umgebung entgegenwirken. Es gibt aber besondere Punkte in unserem Sonnensystem, die dem oben beschriebenen Zustand zumindest nahe kommen: die so genannten Lagrange-Punkte. In diesen Punkten addieren sich (fast) alle beteiligten Kräfte zu Null. Wo sich diese Punkte befinden und welche besonderen Eigenschaften sie mit sich bringen, das wollen wir in diesem Beitrag gemeinsam erarbeiten.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Astronomie	Raumfahrt, Astropraxis (Beobachtungstechnik und -verfahren)	Satelliten, Flugbahnen, Missionsprofile, Trojaner
Physik	Gravitation, Schwingungen	Kinetische Energie, Potentielle Energie, Gravitationsgesetz, Corioliskraft, Kreisbewegung, Zweikörperproblem, Dreikörperproblem, kosmische Geschwindigkeiten, Lagrange-Punkte, Stabilität von Gleichgewichtslagen, Lissajous-Figuren
Fächerverknüpfung	Astro-Mathematik, Astro-Physik	Bewegungsgleichungen, Dreikörperproblem

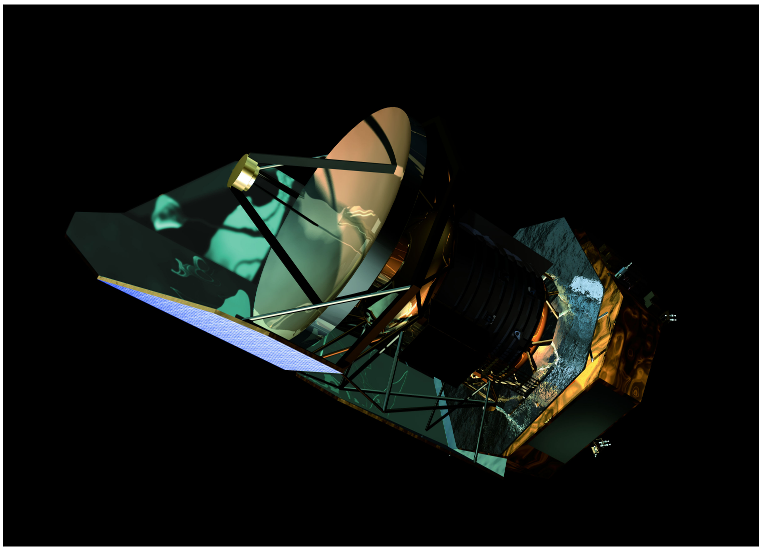

Abbildung 1:
Der Satellit HERSCHEL (früher als "FIRST" bezeichnet) wird das erste Weltraumobservatorium sein, das den kompletten Wellenlängenbereich des Fernen Infrarot (FIR) bis zum Sub-Millimeter-Bereich (60 - 670 Mikrometer) abdeckt. Sein Start ist für den 29.2.2008 geplant. Es ist nach dem deutsch-britischen Astronomen Sir Friedrich Wilhelm Herschel (1738-1822) benannt, der im Jahr 1800 die Infrarotstrahlung entdeckte. (Quelle: ESA, Graphik Medialab)

Diskussionsvorschlag: Überlegt, was das genau heißt, „bewegungslos“ im Weltraum zu sein. Ist ein „bewegungslos“ bezüglich eines bestimmten Punktes/Körpers vielleicht sinnvoller ?
Hinweise: Denkt an verschiedenen Bezugssysteme. Gibt es überhaupt einen „festen“ Punkt im Weltraum?

Aufgabe 1: Recherchiere: Wofür werden Satelliten und Raumsonden eingesetzt und welche Flugbahnen sind dafür jeweils von Vorteil?

Aufgabe 2: Vielen bekannt ist die sog. *geostationäre Flugbahn* eines Satelliten: Ein Satellit fliegt auf einer zur Erddrehung synchronen Bahn oberhalb des Erdäquators, das heißt er bewegt sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde. Berechne, welche Höhe über dem Erdboden ein derartiger Satellit haben muss?

Aufgabe 3: Ermittle die wahre Geschwindigkeit eines Punktes auf der Erdoberfläche in Abhängigkeit der geographischen Breite φ seines Standortes. Vergleiche diese Werte mit denen anderer Planeten aus unserem Sonnensystem (z.B. den Gasriesen). Was fällt Dir auf?

Gravitationsgesetz

Newtons großartige Leistung bestand unter anderem darin, dass er als erster die physikalischen Gesetze, deren Gültigkeit auf der Erde bekannt waren, auf die Bewegung der Himmelskörper im Weltall anwendete. Nach einer verbreiteten Anekdote, deren Wahrheitsgehalt allerdings angezweifelt wird, kam er 1666 durch einen vom Baum fallenden Apfel auf die Idee, dass die irdische Schwerkraft auch auf den Mond wirken könnte. In seiner berühmten *Mondrechnung* von 1666 bewies er diese Vermutung als richtig. 20 Jahre später stellte Newton in seinem Hauptwerk *Philosophiae naturalis principia mathematica* seine Gravitationstheorie vor. Er konnte Keplers Vermutung verifizieren, dass die gegenseitige Anziehung zwischen zwei Körpern umgekehrt zum Quadrat ihrer Entfernung abnimmt, egal ob auf der Erde oder im Weltraum:

$$\vec{F}_{\mathrm{G}}=-\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

G wird *Gravitationskonstante* genannt und ihr Wert beträgt $\mathrm{G} = 6{,}672\ 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$. Sie kann experimentell bestimmt werden, z.B. mit einer Drehwaage nach *Cavendish* und *Eötvös*.
Für den Betrag der Gravitationskraft gilt:

$$F_{\mathrm{G}}=-\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Aufgabe 4: Führe Newtons Mondrechnung selbst durch.

Unter dem folgenden Link findest Du eine Simulation zur Mondrechnung: Von einem hohen Turm werden mit frei wählbaren Anfangsgeschwindigkeit Äpfel parallel zur Erdoberfläche geworfen. Spiele mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Wie hoch muss die Geschwindigkeit sein, damit der Apfel – wie ein Mond – um die Erde kreist? Vergleiche die Simulationsergebnisse mit deinen Berechnungen (Aufgabe 2)!

Aufgabe 5: Leite das Gravitationsgesetz unter der Annahme ab, dass sich ein Planet der Masse *m* auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper der Masse *M* bewegt. (Tipp: 3. Keplersches Gesetz).

Kosmische Geschwindigkeiten

Mit welch enormen Geschwindigkeiten Raketen in den Weltraum geschossen werden müssen, um der Gravitationsanziehung der Erde oder eines anderen Planeten zu entkommen, sehen wir an den Beträgen der *kosmischen Geschwindigkeiten*:

Soll ein Körper der Masse m von der Oberfläche eines Zentralkörpers (Masse M, Radius R) zum einen auf eine bestimmte Höhe gehoben und zum zweiten dort auf eine Umlaufbahn gebracht werden, wird ihm im allgemeinen die dazu erforderliche Energie beim Abschuss auf der Oberfläche des Zentralkörpers als kinetische Energie $E_k = ½\, m\, v_0^2$ mitgegeben.
Wird er nur auf eine bestimmte Höhe $h = r - R$ gehoben, Endgeschwindigkeit $v_e = 0$, so ist diese Energie gleich der Arbeit im Zentralkraftfeld.

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_R^r -\mathrm{G} \frac{m M}{r^2} \mathrm{d}r = \mathrm{G}\, mM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Soll der Körper zusätzlich in der Höhe r eine kreisförmige Umlaufbahn beschreiben, so muss ihm auch die kinetische Energie für diese Bahn mitgegeben werden.

$$m \frac{v^2}{r} = \mathrm{G} \frac{m M}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mathrm{G} \frac{M}{r}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{G} M}{r} = \mathrm{G}\, mM \frac{1}{2\mathrm{r}}$$

Daraus folgt:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathrm{G}\, mM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2\mathrm{r}}\right)$$

Erste kosmische Geschwindigkeit

So nennt man die Geschwindigkeit, bei der ein tangential zu einer Planetenoberfläche (hier: Erde) bewegter Körper nicht mehr auf den Planeten zurückfällt, sondern sich auf der niedrigsten Kreisbahn um den Planeten bewegt $(r \approx R)$.

$$v_1 = \sqrt{\mathrm{G} \frac{M}{R}} = 7{,}91\,\mathrm{km/s} = 28\,400\,\mathrm{km/h}$$

Bei einem Start in Ostrichtung trägt die Erddrehung mit einem Anteil von etwa 0,46 km/s zur Bahngeschwindigkeit bei, in Westrichtung ist der Anteil zusätzlich aufzubringen. Die Kreisbahngeschwindigkeit polarer Bahnen bleibt von der Erdrotation unbeeinflusst.

Zweite kosmische Geschwindigkeit

Sie bezeichnet die Geschwindigkeit, bei der ein Körper das Gravitationsfeld des Planeten (hier: Erde) verlässt $(r \rightarrow \infty)$.

$$v_2 = \sqrt{2\,\mathrm{G}\frac{M}{R}} = \sqrt{2}\,v_1 = 11{,}2\,\mathrm{km/s} = 40164\,\mathrm{km/h} \quad .$$

Dritte kosmische Geschwindigkeit

Sie gibt an, mit welcher Anfangsgeschwindigkeit eine Rakete starten muss, damit sie genug Energie hat, um das Sonnensystem zu verlassen.

Um das Schwerefeld der Sonne (beginnend von der Erde) zu verlassen, benötigt die Sonde eine Geschwindigkeit von 42,2 km/s. Die Erde bewegt sich aber schon selbst mit ca. 30 km/s um die Sonne. Das heißt, von der Erde muss sie mit einer Relativgeschwindigkeit von mindestens v_R = 142,2 km/s – 30 km/s = 12,2 km/s starten, damit sie der Sonne entkommen kann. Um die ganz Erde zu verlassen, benötigt sie zusätzlich nochmals v_2= 11,2 km/s.

$$\frac{1}{2} m v_R^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{(12{,}2\,\mathrm{km/s})^2 + (11{,}2\,\mathrm{km/s})^2} = 16{,}6\,\mathrm{km/s} = 59621\,\mathrm{km/h} \quad .$$

Startet eine Sonde mit einer Geschwindigkeit v, die größer ist, als die Geschwindigkeit, die er eigentlich benötigt, bleibt eine Endgeschwindigkeit v_E übrig.

$$v = \sqrt{v_2^2 + v_\mathrm{E}^2} \quad .$$

Aufgabe 6: Die Kometensonde Rosetta soll im All eine Endgeschwindigkeit von v_E = 3,545 km/s erreichen. Mit welcher Geschwindigkeit muss Rosetta vom Erdboden aus starten?

Wir erkennen, dass eine etwas größere Anfangsgeschwindigkeit eine deutlich höhere Endgeschwindigkeit zur Folge hat.

Das Dreikörperproblem

Mit dem Zweikörperproblem sind wir jetzt genügend vertraut. Jetzt nehmen wir noch einen weiteren Körper dazu, und schon wird es kompliziert: Das Dreikörperproblem stellt eines der Hauptprobleme der Himmelsmechanik dar. Zwischen den drei Körpern wirken infolge der Massenanziehung Kräfte, unter deren Einfluss sich die Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Mit Hilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes lassen sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die auf jeden der Körper von den beiden anderen Körpern ausgeübten Kräfte berechnen und so die Beschleunigungen nach Größe und Richtung bestimmen. Während es beim Zweikörperproblem aber geschlossene Lösungen gibt (Kegelschnitte), so ist dies beim Dreikörperproblem nicht mehr möglich. Es lassen sich lediglich allgemeine Gesetze angeben, die grundsätzlich für alle abgeschlossenen gravitativen Systeme gelten:

Schwerpunktsatz – der gemeinsam Schwerpunkt der Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Flächensatz bzw. *Drehimpulssatz* – Die Summe der Produkte aus den Massen und den Flächengeschwindigkeiten ist konstant bzw. der Gesamtdrehimpuls bei der Bewegung der Körper bleibt konstant.

Energiesatz – Die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie der Körper ist konstant.

Die Lagrange-Punkte

1772 entdeckte Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) – einer der größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts – dass es fünf Stellen in der Umgebung zweier sich im Weltraum umkreisender Massen gibt, an denen sich die Gravitations- und Zentrifugalkräfte gerade gegenseitig aufheben. Diese Punkte werden nach ihrem Entdecker *Lagrange-Punkte* (auch: *Librationspunkte*) genannt. Sie werden mit L1 bis L5 bezeichnet. Sie sind die algebraischen Lösungen des sog. eingeschränkten Dreikörperproblems, bei dem eine große Masse (z.B. die Sonne) und eine um mindestens den Faktor 25 kleinere Masse (z.B. die Erde) einen gemeinsamen Schwerpunkt umkreisen. Ein dritter Körper mit vernachlässigbarer Masse (z.B. eine Raumsonde) bewegt sich im Schwerefeld der beiden ersten Massen ebenfalls um den gemeinsamen Schwerpunkt, jedoch ohne diese zu beeinflussen. (Zur mathematischen Herleitung der Lagrange-Punkte siehe Lagrange1 (Seite 16f.) und Lagrange2).

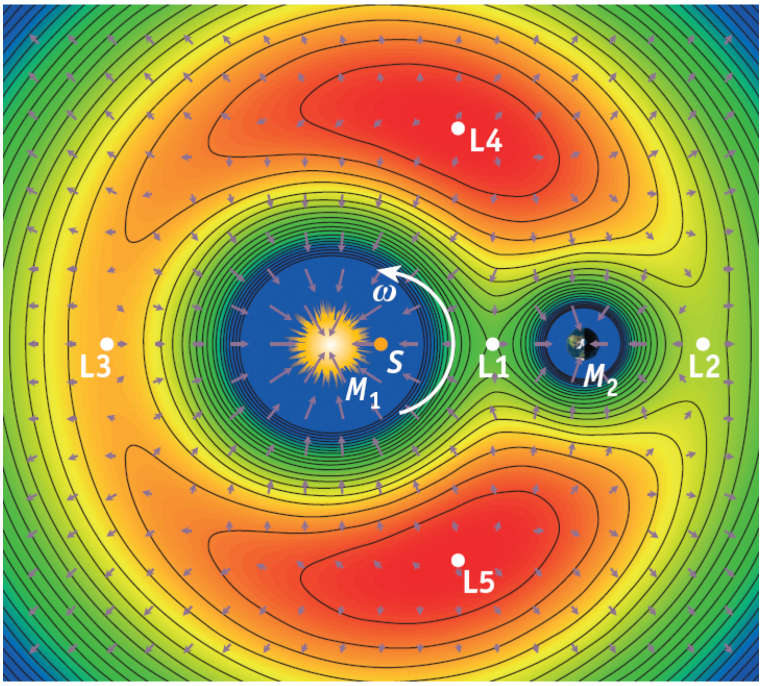

Abbildung 2:
Das Gravitations- und Fliehkraftfeld eines Systems (M_1:M_2= 5) mit seinen fünf Lagrange-Punkten. Sowohl die Körper als auch die Lagrange-Punkte selbst bewegen sich um den Schwerpunkt S auf einer Bahnebene (Quelle: SuW 7/2003)

In unserem Sonnensystem kennen wir auch Lagrange-Punkte außerhalb des Systems Sonne-Erde, an denen sich sogar Kleinplaneten akkumuliert haben:

1906 entdeckte der Astronom Max Wolf von der Landessternwarte Heidelberg in der Umlaufbahn des Jupiters einen ca. 70 km großen Asteroiden, den er *Achilles* nannte, nach einem griechischen Helden des Trojanischen Krieges aus *Homers Ilias*. Dieser Asteroid eilt Jupiter auf seiner Bahn um die Sonne etwa 60 ° voraus. Im gleichen Jahr wurde ein 147 km große Asteroid entdeckt, der sich ebenfalls auf Jupiters Bahn bewegt, diesmal aber um 60 ° nachlaufend. Auch er wurde nach einem Helden des Trojanischen Krieges benannt, *Patroklos*. Mittlerweile kennen wir über 1000 Asteroiden, die sich in der näheren Umgebung dieser beiden Punkte aufhalten und allgemein als *Trojaner* bekannt sind.

Analoges gilt im Saturnsystem: im Punkt L4 von Saturn und Dione bzw. L4 und L5 von Saturn und Tethys findet sich jeweils ein weiterer kleiner Saturnsatellit.

Siehe dazu das Trojaner-Simulationsprogramm von Helmut Jahns von der VdS-Fachgruppe Computer-Astronomie (näheres siehe *Trojaner-Simulationsprogramm.pdf*).

Stabilität und Lage der Lagrange-Punkte

Um eine Aussage über die Stabilität eines Gleichgewichtspunktes zu treffen, müssen wir unseren Probekörper in Gedanken ein wenig aus seiner Ruhelage verrücken und sehen was passiert. Anschaulich geht das am besten mit Hilfe von Abbildung 3. Sie zeigt eine dreidimensionale Darstellung des Kraftfeldes, dem sich eine Sonde im System Sonne-Erde ausgesetzt sieht: Bei den Lagrange-Punkten hat das Reliefmodel lokal jeweils eine horizontale Stelle: L4 und L5 sind leichte “Hügelkuppen“, L1, L2 und L3 etwas tiefer liegende Sattelpunkte. Ein Verrücken unseres Probekörpers aus einer seiner Gleichgewichtslagen würde entweder zu einem unwiderruflichen „Abrutschen“ in eines der Potentialtöpfe führen (d.h. die Sonde würde entweder auf die Erde oder auf die Sonne stürzen) oder der Probekörper würde das System verlassen. In diesem statischen Modell sind daher alle Gleichgewichtspunkte instabil.

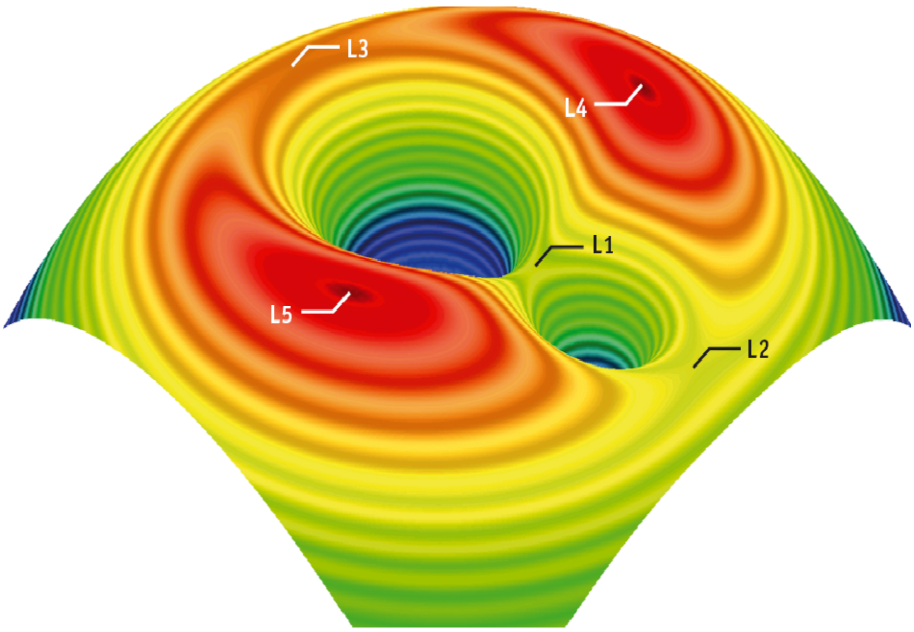

Abbildung 3: Reliefmodell des Potentialverlaufs für ein System, bestehend aus zwei Körpern mit einem Massenverhältnis von 5:1. (Quelle: SuW 7/2003)

Da wir es aber in Wirklichkeit mit einem rotierendem Bezugssystem zu tun haben, tritt neben der Gravitations- und Zentrifugalkraft noch die *Corioliskraft* in Erscheinung. Sie ist keine einfache Funktion des Ortes, sondern hängt von Richtung und Betrag des Geschwindigkeitsvektors unseres kleinen Probekörpers ab. Ähnlich den Windströmungen auf der Erde, die durch die Erddrehung spiralförmig und nicht gerade verlaufen, krümmt die Corioiskraft die Bahn unseres dritten Körpers in Richtung des betreffenden Lagrange-Punktes. Es kommt zu einer Umrundung desselben.

L1, L2 und L3: Für einen Körper in den Librationspunkten L1, L2 oder L3 sind die Stabilitätsbedingungen sehr strickt: kommt auch nur eine einzige weitere kleine Störung dazu, so werden die Bahnen instabil und der kleine Körper wird abwandern. Dies geschieht allerdings so langsam, dass ein quasistabiler Aufenthalt ohne große manuelle Gegensteuerung auf bestimmten Umlaufbahnen möglich ist. Daher lässt man betreffenden Satelliten eine Schwingungsbewegung um den Lagrange-Punkt ausführen, die nur alle paar Wochen zu korrigieren ist. L1 und L2 sind von der Erde etwa 1,5 Millionen km entfernt (ca. 1/100 AE), L3 ist 300 Millionen km von der Erde entfernt.

L4 und L5: Schon Lagrange konnte zeigen, dass L4 und L5 dynamische Gleichgewichtspunkte darstellen, die von kleinen Massen permanent umrundet werden können. Das liegt daran, dass sich dort die Corioliskraft dynamisch stabilisierend bemerkbar macht. Es kommt auch vor, dass Körper periodisch zwischen L4, über L3 zu L5 hin- und wieder zurücklaufen. Die Einhüllende dieser Bahnkurve erinnert dann an ein Hufeisen. L4 und L5 bilden mit den beiden großen Massen je ein gleichseitiges Dreieck. Da im System Sonne-Erde der Systemschwerpunkt fast mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt, liegen L4 und L5 quasi auf der Erdbahn. Sie kreisen jeweils um 60 Grad versetzt mit der Erde um die Sonne. Ihr Abstand zur Erde beträgt 150 Millionen km.

Halo-Bahnen

Bei den Flugbahnen der Raumsonden um die Lagrange-Punkte L1 und L2 handelt es sich nicht um einfache Keplerbahnen, wie wir sie von den Zweikörperproblemen her kennen, sondern um gekoppelte Schwingungen um den Lagrange-Punkt mit unterschiedlichen Schwingungsparametern in verschiedenen Raumrichtungen. Diese Bahnen sind aus der Schwingungslehre bekannt und werden nach dem französischen Mathematiker Jules Antoine Lissajous (1822-1880) *Lissajous-Figuren* genannt. Sie lassen sich im Vorfeld einer Expedition so berechnen, dass sich die Sonde von der Erde aus auf ringförmig geschlossenen Bahnen bewegt, die sich nicht überschneiden, sogenannte *Halo-Bahnen*. Ihre Ausdehnung liegt in der Größenordnung der Mondbahn (!) und die Umlaufzeit kann schon einmal sechs Monate betragen.

Wir wollen nun selbst Lissajous-Figuren herstellen. Das lässt sich mit einem Lissajous-Computerprogramm , am Oszilloskop oder mechanisch realisieren. Für Schüler besonders reizvoll ist die letztgenannte Variante. (Der genaue Versuchsaufbau befindet sich in der Datei *Lissajous-Figuren.pdf*).

Aufgabe 7: Überlege Dir, wann Lissajous-Figuren geschlossene Bahnen ergeben! Versuche mit dem Pendelversuch nichtgeschlossene Figuren herzustellen!

Bumerang-Effekt

Bei perfekter Einhaltung genau festgelegter Anfangsbedingungen nach der Startphase ist es möglich, ohne Kurskorrektur (!) eine ziemlich komplexe Flugbahn zu realisieren. Dabei kann die Sonde sich selbst überlassen werden und die Flugbahn beinhaltet neben der Umrundung des Lagrange-Punktes auch den Hin- und Rückflug!

Ein derartiges Manöver wurde mit der Raumsonde GENESIS durchgeführt, die im September 2004 zur Erde zurückkehrte.

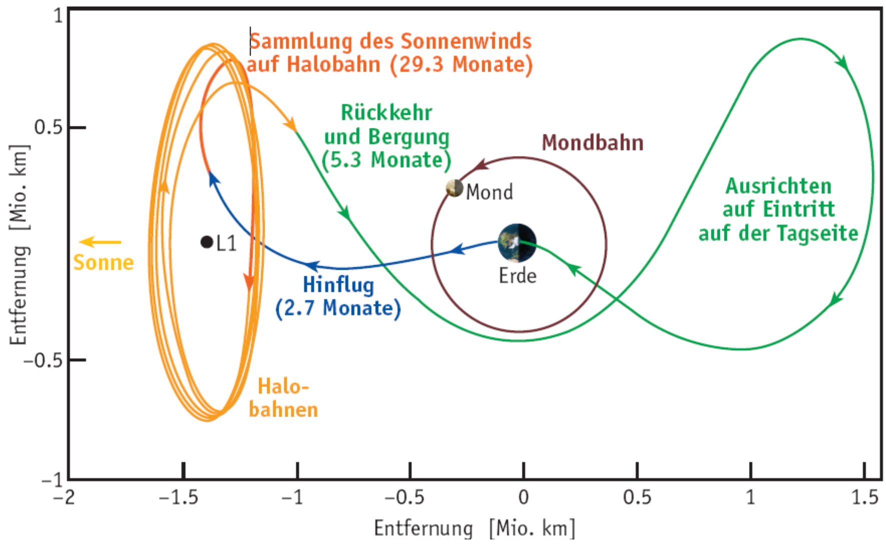

Abbildung 4: Flugbahn der Raumsonde GENESIS. (Quelle: SuW 7/2003)

Da die Librationspunkte auch aus reinen Kostengründen eine immer wichtigere Rolle in der Astronomie und Raumfahrt spielen, werden wir in der näheren Zukunft noch oft von ihnen hören.

Aufgabe 8: Recherchiere im Internet, welche Satelliten und Raumsonden bereits zu den Librationspunkten des Systems Sonne-Erde geschickt wurden. Welche wissenschaftlichen Gründe dafür ergeben sich aus den Missionsprofilen?