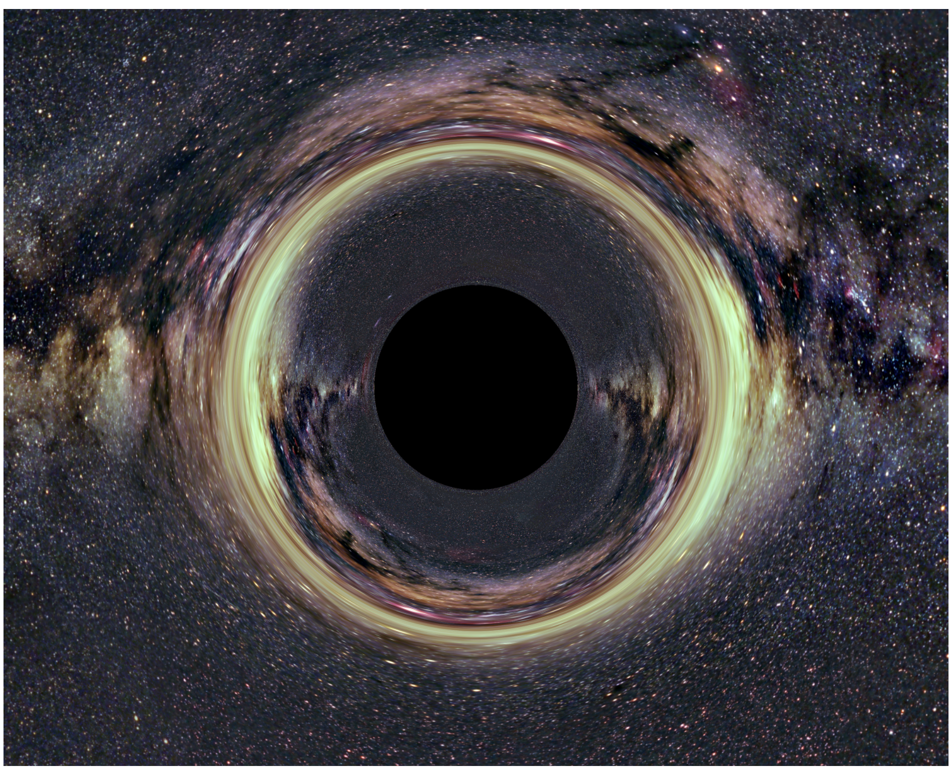
Das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße

Ute Kraus

Im Zentrum der Milchstraße befindet sich ein Schwarzes Loch mit einer Masse von 4,3 Millionen Sonnenmassen. Wie groß ist es? Die Frage wird im folgenden von zwei Seiten angegangen. Eine einfache Rechnung liefert eine Abschätzung. Und eine Computersimulation setzt dieses Schwarze Loch an die Stelle der Sonne und zeigt, wie groß es von der Erde aus aussähe.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	Mechanik, Relativitätstheorie	Gravitationsgesetz, Energieerhaltung, Fluchtgeschwindigkeit, Lichtablenkung
Astronomie	Sterne	Schwarze Löcher
Mathematik	Geometrie	Projektion



wissenschaft in die schulen!

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Zentrum der Milchstraße befindet sich ein Schwarzes Loch mit einer Masse von 4,3 Millionen Sonnenmassen. Zwar ist es nicht möglich, dieses Schwarze Loch direkt zu sehen. Aber mit modernster Teleskoptechnik werden Sterne in seiner Nähe aufgelöst und ihre Bahnen verfolgt, wie Stefan Gillessen in seinem Beitrag „Eine Nacht im Zentrum der Milchstraße" in Heft 2/2009 von Sterne und Weltraum beschreibt. Diese und weitere Beobachtungen liefern überzeugende Argumente für die Existenz des Schwarzen Lochs im Zentrum der Milchstraße.
Im folgenden geht es um den Wunsch, noch genauer hinzuschauen: Wenn man das Schwarze Loch selbst auflösen könnte, was würde man sehen? Wie groß ist das Schwarze Loch überhaupt?
Im ersten Teil dieses Beitrags wird im Rahmen der Newtonschen Mechanik eine Größenordnung für die Ausdehnung des Schwarzen Lochs abgeleitet. Im zweiten Teil folgt eine Computersimulation zu seinem Anblick: Angenommen, an der Stelle der Sonne befände sich ein Schwarzes Loch von der Größe desjenigen im Zentrum der Milchstraße – was würde man sehen?

2 Die Größe des Schwarzen Lochs im galaktischen Zentrum

2.1 Vorüberlegungen

Wirft man einen Ball nach oben, dann erreicht er eine bestimmte Höhe und fällt nach unten zurück. Je größer die Startgeschwindigkeit, desto größer ist die erreichte Höhe. Ist die Geschwindigkeit aber groß genug, dann fällt ein Objekt nicht wieder zurück, sondern entweicht: Es hat beim Start die Fluchtgeschwindigkeit überschritten. Für die Erde beträgt die Fluchtgeschwindigkeit 11 Kilometer pro Sekunde.
Im 18. Jahrhundert wurden Überlegungen darüber angestellt, dass ein Stern, dessen Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit wäre, kein Licht abstrahlen könnte und deshalb unsichtbar wäre.
Dieser klassische unsichtbare Stern entspricht in gewisser Weise einem Schwarzen Loch, wie es Einsteins Relativitätstheorie vorhersagt. Denn das Kennzeichen des Schwarzen Lochs ist sein sogenannter Ereignishorizont, aus dessen Innenbereich weder Materie noch Licht entweicht.
Der kritische Radius, bei dem in der klassischen Überlegung der Stern gerade unsichtbar wird (Fluchtgeschwindigkeit = Lichtgeschwindigkeit), entspricht in diesem Vergleich dem Ereignishorizont des Schwarzen Lochs.
Um eine Größenordnung für die Ausdehnung des Schwarzen Lochs im Zentrum der Milchstraße zu erhalten, wird im folgenden für seine Masse der kritische Radius berechnet.

2.2 Die Fluchtgeschwindigkeit

In der Nähe der Erdoberfläche ist die Gravitationsbeschleunigung konstant ($g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$). Die potentielle Energie im Gravitationsfeld ist in diesem Fall

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh \qquad \text{(nahe der Erdoberfläche)},$$

wobei m die Masse des Körpers ist und h die Höhe über dem Erdboden. Aus der Energieerhaltung folgt die Höhe, die der Körper erreichen kann: Die Gesamtenergie, kinetische plus potentielle Energie, besteht beim Start nur aus kinetischer Energie $E = mv_{\mathrm{Start}}^2/2$ und am Umkehrpunkt nur aus potentieller Energie $E = mgh_{\mathrm{Umkehr}}$. Da die Gesamtenergie erhalten ist, gilt

$$mv_{\mathrm{Start}}^2/2 = mgh_{\mathrm{Umkehr}} \qquad \text{(nahe der Erdoberfläche)},$$

woraus man die maximale Höhe in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit berechnen kann.

Wenn sich ein Objekt weit von der Erdoberfläche entfernt, dann muss man berücksichtigen, dass die Gravitationsbeschleunigung mit der Entfernung abnimmt. Sie beträgt

$$a = GM_{\mathrm{Erde}}/r^2$$

(G die Gravitationskonstante) an einem Punkt, der den Abstand r zum Erdmittelpunkt hat. An der Erdoberfläche $r = R_{\mathrm{Erde}}$ ist dies gleich der oben genannten Erdbeschleunigung g: $g = GM_{\mathrm{Erde}}/R_{\mathrm{Erde}}^2$. Die potentielle Energie in der Höhe h über dem Erdboden beträgt in diesem Fall[1]

$$E_{\mathrm{pot}} = mGM_{\mathrm{Erde}} \left(\frac{1}{R_{\mathrm{Erde}}} - \frac{1}{R_{\mathrm{Erde}} + h} \right)$$

und dieselbe Überlegung wie oben liefert jetzt den Zusammenhang

$$mv_{\mathrm{Start}}^2/2 = mGM_{\mathrm{Erde}} \left(\frac{1}{R_{\mathrm{Erde}}} - \frac{1}{R_{\mathrm{Erde}} + h_{\mathrm{Umkehr}}} \right).$$

Wenn h_{Umkehr} unendlich groß wird, entweicht das Objekt. Für die Fluchtgeschwindigkeit v_{Flucht} gilt also

$$v_{\mathrm{Flucht}}^2/2 = GM_{\mathrm{Erde}} \frac{1}{R_{\mathrm{Erde}}}.$$

Oder allgemein für einen kugelförmigen Himmelskörper mit Masse M und Radius R:

$$v_{\mathrm{Flucht}}^2/2 = \frac{GM}{R}. \tag{1}$$

Aufgabe 1: Wie groß sind die Fluchtgeschwindigkeiten von Erde, Mond und Sonne?
Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6380$ km,
Mond: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, $R = 1740$ km,
Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 696000$ km
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(s^2kg)}$

[1] Für den Fall, dass h wesentlich kleiner ist als R_{Erde} gilt die Näherung $1/(R_{\mathrm{Erde}} + h) = 1/(R_{\mathrm{Erde}}[1 + h/R_{\mathrm{Erde}}]) \approx (1/R_{\mathrm{Erde}})(1 - h/R_{\mathrm{Erde}}) = 1/R_{\mathrm{Erde}} - h/R_{\mathrm{Erde}}^2$, so dass die potentielle Energie $E_{\mathrm{pot}} = mGM_{\mathrm{Erde}}/R_{\mathrm{Erde}}^2 \cdot h = mgh$ beträgt, in Übereinstimmung mit den Formeln im ersten Absatz.

2.3 Der kritische Radius eines Sterns mit Masse M

Wenn die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist, hat der Himmelskörper den kritischen Radius. Aus Gleichung (1) folgt, dass

$$R_{\text{krit}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{2}$$

ist.

Aufgabe 2: Wie klein müsste die Erde sein, damit ihre Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist?
Masse der Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg,
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{s}^2\text{kg})$,
Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

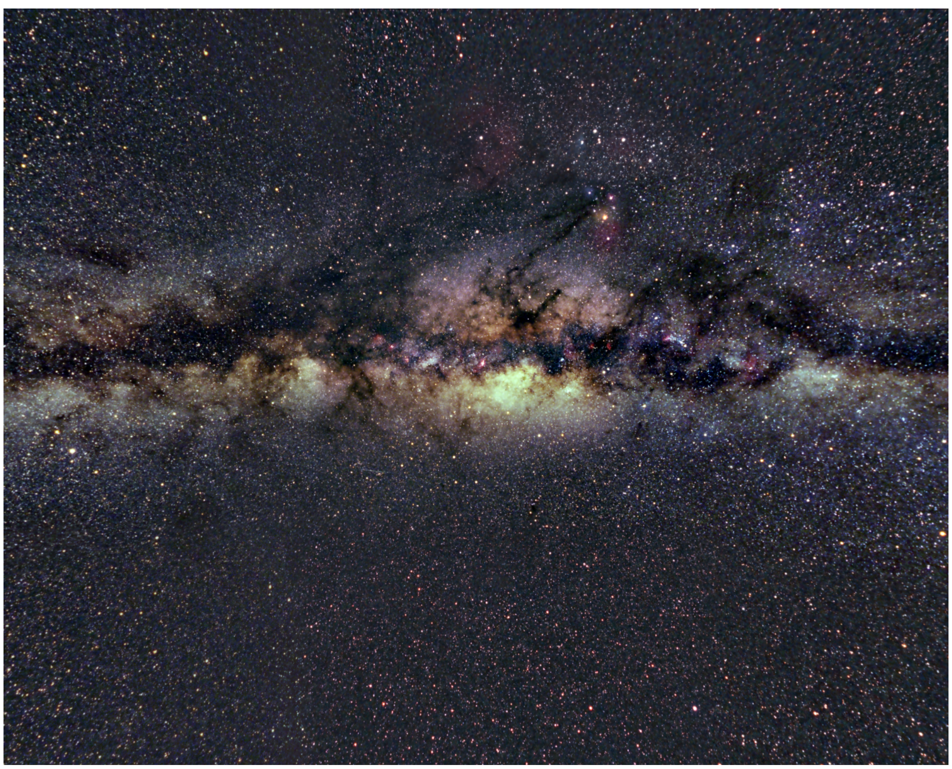
Aufgabe 3: Wählen Sie jetzt statt der Erde einen Stern mit der Masse des Schwarzen Lochs im galaktischen Zentrum (4,3 Millionen mal die Masse der Sonne). Wie groß ist jetzt der kritische Radius?
Masse der Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg,
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{s}^2\text{kg})$,
Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

Der kritische Radius eines Sterns nach Gleichung (2) ist rechnerisch identisch mit dem Schwarzschild-Radius eines Schwarzen Lochs der betrachteten Masse, der die Ausdehnung des Ereignishorizonts angibt. Auch wenn die Newtonsche Physik in diesem Sinne „das richtige Ergebnis“ liefert, muss man sich bewusst machen, dass die klassische Betrachtung in wichtigen Aspekten von der relativistischen abweicht. Von einem klassischen unsichtbaren Stern könnten Lichtteilchen mit Geschwindigkeit c zwar nicht entweichen, sie würden aber von der Sternoberfläche unterhalb von R_{krit} ein Stück weit in die Höhe gelangen, bevor sie umkehren und zurückfallen. Ein Beobachter in der Nähe des Sterns würde bis zu dieser Höhe Licht registrieren. Anders dagegen bei einem Schwarzen Loch: Aus dem Ereignishorizont entweicht kein Licht, so dass auch knapp außerhalb keine Strahlung aus dem Inneren des Schwarzen Lochs vorhanden ist.
Ein zweiter wichtiger Unterschied betrifft die Bedeutungen des kritischen Radius bzw. des Schwarzschild-Radius. Der kritische Radius gibt an, wie weit die Oberfläche des Sterns von seinem Mittelpunkt entfernt ist. Diese Entfernung könnte prinzipiell mit Hilfe von Maßstäben ausgemessen werden. Bei einem Schwarzen Loch dagegen ist eine „Entfernung zum Mittelpunkt“ keine meßbare Größe. Die Raumzeit innerhalb des Ereignishorizonts ist nicht statisch; es gibt prinzipiell nicht die Möglichkeit, eine derartige Entfernung zu einem Mittelpunkt mit Maßstäben zu vermessen. Was aber prinzipiell messbar ist, ist der Umfang des Innenbereichs, der ja (bei einem nichtrotierenden Schwarzen Loch) die Form einer Kugel hat. Dies ist auch die konkrete Bedeutung des Schwarzschild-Radius r_S: Ein um das Schwarze Loch zentrierter Kreis hat dort den Umfang $2\pi r_S$.

3 Das Schwarze Loch (virtuell) aus der Nähe betrachtet

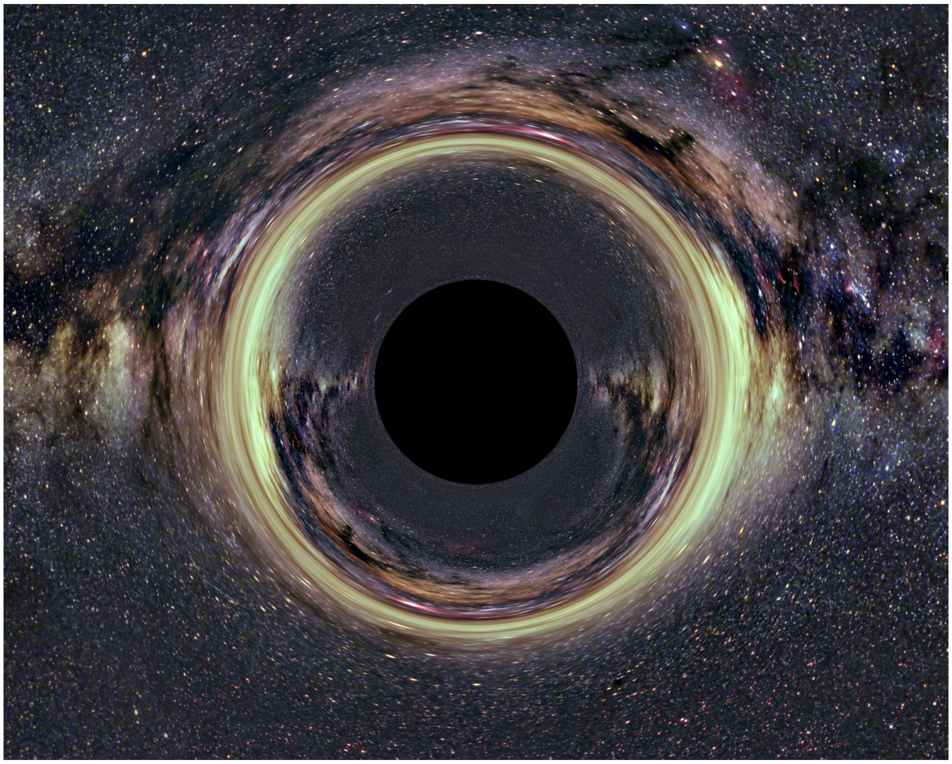
3.1 Blick auf das Schwarze Loch

Um eine anschauliche Vorstellung von der Größe des Schwarzen Lochs im galaktischen Zentrum zu geben, setzt die folgende Computersimulation dieses Schwarze Loch an die Stelle der Sonne und berechnet den Anblick, den man von einem Punkt auf der Erdbahn aus, d. h. aus 150 Millionen Kilometern Abstand hätte.
Die computergenerierten Bilder sind für einen horizontalen Kameraöffnungswinkel von 90 Grad berechnet. Den richtigen Eindruck bekommt man, wenn man die Bilder auch unter diesem Öffnungswinkel ansieht – für einen bequemen Augenabstand von 30 Zentimetern müsste das einzelne Bild dazu auf 60 Zentimeter Breite vergrößert werden, was etwa dem Format DINA2 quer entspricht.
Zunächst zum Vergleich ein Blick in den Nachthimmel ohne das Schwarze Loch[2]. Deutlich sichtbar ist das leuchtende Band der Milchstraße; die Bildmitte fällt in das Sternbild Schütze.



Und so sähe es aus, wenn das Schwarze Loch anstelle der Sonne im Sternbild Schütze stünde:

[2] Das Hintergrundbild der Computersimulation ist das All-Sky Milky Way Panorama von Axel Mellinger [1].



Der Bereich innerhalb des Horizonts, aus dem weder Materie noch Licht entkommen kann, erscheint als schwarze Scheibe.
Die schwarze Scheibe ist von einer ringförmigen Struktur umgeben und die Milchstraße erscheint in der Nähe des Schwarzen Lochs verzerrt. Mehr zu den Themen Ring und Verzerrungen finden Sie in früheren Beiträgen zu *Sterne und Weltraum* und zu *Wissenschaft in die Schulen!* ([2, 3, 4, 5]) sowie auf der Internetseite *Tempolimit Lichtgeschwindigkeit* ([6]).
Hier soll es abschließend noch einmal um die Größe des Schwarzen Lochs gehen – wie groß sieht es aus?

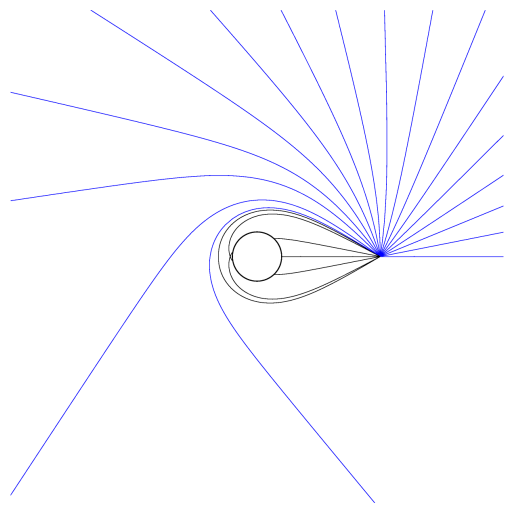
Aufgabe 4:
Unter welchem Winkel erscheint eine Kugel mit dem in Aufgabe 3 berechneten Radius aus der Entfernung Erde-Sonne (150 Millionen Kilometer)?

Aufgabe 5:
Messen Sie die Größe der schwarzen Scheibe im Bild aus und bestimmen Sie daraus den Winkel, unter dem das Schwarze Loch in der Simulation gesehen wird. Das Bild ist eine Zentralprojektion, die volle Breite entspricht einem Winkel von 90 Grad.

Aufgabe 6:
Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 4 und 5. Interpretieren Sie das Ergebnis anhand der im folgenden beschriebenen Grafik.

Dass Massen Licht ablenken, war einer der ersten Tests von Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie. Für Licht, das nahe am Rand der Sonne vorbeikommt, sagte Einstein eine Ablenkung um 1,75 Bogensekunden voraus, die durch Beobachtungen inzwischen mit hoher Genauigkeit bestätigt ist. Im Gegensatz zu dieser winzigen Abweichung ist die

Lichtablenkung in der Nähe eines Schwarzen Lochs dramatisch groß, wie die folgende Grafik illustriert.



Aus verschiedenen Richtungen einfallendes Licht erreicht einen Beobachter, in dessen Nähe sich ein Schwarzes Loch befindet. Der Kreis links im Bild markiert den Ereignishorizont des Schwarzen Lochs, der Punkt rechts im Bild den Beobachter. Die blau eingezeichneten Strahlen starten weit draußen, z.B. bei weit entfernten Sternen. (Der Übersichtlichkeit halber ist nur die obere Hälfte der Schar eingezeichnet.) Aus dem Ereignishorizont entweicht keine Strahlung. Wenn sich auch unmittelbar außerhalb davon keine Strahlungsquelle befindet, dann erreicht den Beobachter längs der schwarz gezeichneten Lichtwege keine Strahlung und ein Teil des Himmels erscheint schwarz. Die äußersten der eingezeichneten schwarzen Strahlen begrenzen gerade die schwarze Kreisscheibe.

4 Ausblick

Ein massereiches Schwarzes Loch am Ort der Sonne würde nicht nur den Anblick des Nachthimmels verändern, sondern hätte noch weitere dramatische Auswirkungen. So würde die Erde für eine Umrundung nicht ein Jahr brauchen, sondern nur etwa vier Stunden und hätte dabei eine Geschwindigkeit von ca. 60.000 Kilometern pro Sekunde. Dies sind 20% der Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegung mit sehr hohen Geschwindigkeiten hat ihrerseits Einfluß darauf, wie ein Betrachter seine Umgebung sieht (mehr dazu in [7, 8, 2, 3, 4]); bei 20% der Lichtgeschwindigkeit wäre mit dem bloßen Auge der Intensitätseffekt bereits deutlich zu sehen. Das ist in der obigen Computersimulation nicht berücksichtigt; die Abbildung zeigt, was ein Beobachter sehen würde, der sich relativ zum Schwarzen Loch nicht bewegt, etwa in einem Raumschiff, das seine Position zum Schwarzen Loch konstant hält.
Dieses fiktive Raumschiff, welches das Schwarze Loch nicht umrundet, müsste dann allerdings nach außen beschleunigen, um nicht hineinzustürzen. Um die Anziehung durch das Schwarze Loch gerade zu kompensieren, wäre die 2700-fache Erdbeschleunigung erforderlich - kein kleines Problem für die Besatzung.

5 Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1
Die Fluchtgeschwindigkeit der Erde beträgt 11 Kilometer pro Sekunde, die des Mondes 2,4 Kilometer pro Sekunde und die der Sonne 620 Kilometer pro Sekunde.

Aufgabe 2
Die gesamte Masse der Erde müsste in einer Kugel mit einem Radius von 9 Millimetern enthalten sein.

Aufgabe 3
Der kritische Radius eines Sterns mit 4,3 Millionen Sonnenmassen beträgt 12,7 Millionen Kilometer.

Aufgabe 4
Die Kugel würde einen Winkel von 9,7 Grad einnehmen.

Aufgabe 5
Auf dem Bild nimmt das Schwarze Loch einen Winkel von 24 Grad ein.

Aufgabe 6
Das Schwarze Loch sieht in der Computersimulation deutlich größer aus als in Aufgabe 4 berechnet. Die Grafik zeigt, dass die äußersten Lichtwege, auf denen keine Strahlung zum Beobachter gelangt, wegen der Lichtablenkung weiter außen liegen als das ohne Lichtablenkung der Fall wäre.

Literatur

[1] Axel Mellinger: Das All-Sky Milky Way Panorama, `http://home.arcor-online.de/axel.mellinger/`

[2] Ute Kraus: Reiseziel: Schwarzes Loch – Visualisierungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie, Sterne und Weltraum 11/2005, S. 46;
Online-Version: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`, Abschnitt *Reiseziel: Schwarzes Loch*

[3] Ute Kraus: Didaktisches Material zu „Reiseziel: Schwarzes Loch“, Wissenschaft in die Schulen, `http://www.wissenschaft-schulen.de/`, Oktober 2005.

[4] Ute Kraus, Isabel Rica Mendez und Andreas King: Einstein on Tour, Sterne und Weltraum 12/2007, S. 30;
Online-Version: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`, Abschnitt *Einstein on Tour*

[5] Ute Kraus: Spiel mit dem Schwarzen Loch, Didaktisches Material zu „Einstein on Tour“, Wissenschaft in die Schulen, `http://www.wissenschaft-schulen.de/`, November 2007.

[6] Corvin Zahn und Ute Kraus: Interaktives Schwarzes Loch, `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`, Abschnitt *Interaktives Schwarzes Loch*

[7] Ute Kraus und Marc Borchers: Fast lichtschnell durch die Stadt – Visualisierung relativistischer Effekte, Physik in unserer Zeit, Heft 2/2005, S. 64;
Online-Version: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`, Abschnitt *Fast lichtschnell durch die Stadt*

[8] Ute Kraus: Tempolimit Lichtgeschwindigkeit – Beobachtungen auf Hochgeschwindigkeitsflügen
Astronomie + Raumfahrt im Unterricht 2/2003, S. 35;
Online-Version: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`, Abschnitt *Beobachtungen auf Hochgeschwindigkeitsflügen*