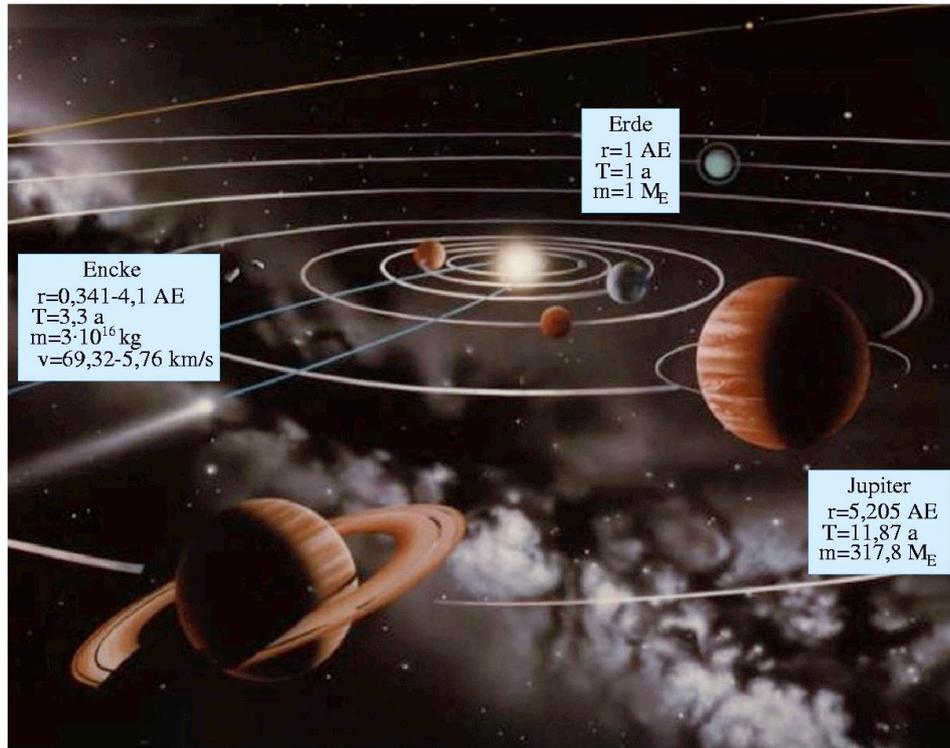


## Aufgaben – Energie von Himmelskörpern im Gravitationsfeld der Sonne Energieerhaltung und Virialsatz auf dem Prüfstand

Die nachfolgend gegebene Tabelle ist zu vervollständigen. Welcher Energiebetrag müsste dem „Raumschiff Erde“ zugeführt werden, damit dieses das Sonnensystem verlässt? Wie lange könnte die Sonne leuchten, wenn sie Jupiters kinetische Energie direkt in Strahlung umsetzen könnte? Die Gültigkeit von Energieerhaltung und Virialsatz ist für die Planeten Erde und Jupiter und für den kurzperiodischen Kometen Encke zu überprüfen und zu diskutieren.



r...Abstand, T...siderische Umlaufzeit, m...Masse (in Erdmassen oder kg), v...Bahngeschwindigkeit

| Objekt         | Abstand<br>$r$<br>[ $10^{11}$ m]         | Masse<br>$m$<br>[ $10^{24}$ kg] | Kreisbahn-<br>Geschwindigkeit $v$<br>[m/s]     | $E_{kin}$<br>[ $10^{32}$ Nm] | $E_{pot}$<br>[ $10^{32}$ Nm] | Virial | Energieerhaltung |
|----------------|--|---------------------------------|--|------------------------------|------------------------------|--------|------------------|
| Erde           |  |                                 |  |                              |                              |        |                  |
| Jupiter        |  |                                 |  |                              |                              |        |                  |
| Objekt         | Abstände<br>$r_P, r_A$<br>[ $10^{11}$ m] | Masse<br>$m$<br>[ $10^{16}$ kg] | Bahngeschwindig-<br>keiten $v_P, v_A$<br>[m/s] | $E_{kin}$                    | $E_{pot}$                    |        |                  |
| Komet<br>Encke | Perihel<br>im Aphel                      | ca. 3*                          | im Perihel<br>69320<br>im Aphel<br>5760        |                              |                              |        |                  |

Perihel ... sonnennächster Bahnpunkt, Aphel ... sonnenfernster Bahnpunkt, \* ... Kometenmasse wurde aufgrund der Annahme eines Kerndurchmessers von 50 km und einer Kerndichte von  $0,5 \text{ kg/m}^3$  abgeschätzt.

## Lösungen zu den Aufgaben

**Geg.:** Gravitationskonstante  $\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$   
 Astronomische Einheit  $1 \text{ AE} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$   
 Erdmasse  $M_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$   
 Sonnenmasse  $M_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   
 siderisches Jahr  $1 \text{ a} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ s}$   
 Leuchtkraft der Sonne  $L_S = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$   
 weitere geg. Größen siehe Abbildung

### Lös.:

| Objekt  | Abstand<br>$r$<br>[ $10^{11} \text{ m}$ ] | Masse<br>$m$<br>[ $10^{24} \text{ kg}$ ] | Kreisbahn-<br>Geschwindigkeit $v$<br>[m/s] | $E_{\text{kin}}$<br>[ $10^{32} \text{ Nm}$ ] | $E_{\text{pot}}$<br>[ $10^{32} \text{ Nm}$ ] | Virial<br>$E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$ | Energieerhaltung<br>$E_{\text{pot}}+E_{\text{kin}}$<br>[ $10^{32} \text{ Nm}$ ] |
|---------|---|--|--|--|--|---|---|
| Erde    | 1,496                                     | 5,979                                    | 29785                                      | 26,521                                       | -53,042                                      | -0,5                                      | -26,521   |
| Jupiter | 7,787                                     | 1900,13                                  | 13061                                      | 1620,7                                       | -3238,4                                      | -0,5                                      | -1620,7   |

| Objekt         | Abstände<br>$r_P, r_A$<br>[ $10^{11} \text{ m}$ ] | Masse<br>$m$<br>[ $10^{16} \text{ kg}$ ] | Bahngeschwindig-<br>keiten $v_P, v_A$<br>[m/s] | $E_{\text{kin}}$<br>[ $10^{25} \text{ Nm}$ ] | $E_{\text{pot}}$<br>[ $10^{25} \text{ Nm}$ ] | $E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$ | $E_{\text{pot}}+E_{\text{kin}}$<br>[ $10^{25} \text{ Nm}$ ] |
|----------------|---|--|--|--|--|---------------------------------|---|
| Komet<br>Encke | Perihel<br>0,510                                  | ca. 3                                    | im Perihel<br>69320                            | 7,208  | -7,807                                       | -0,923                          | -0,599  |
|                | im Aphel<br>6,134                                 |  | im Aphel<br>5760                               | 0,0498                                       | -0,649                                       | -0,077                          | -0,599  |

Die Erde verlässt den Einflussbereich der Sonne, wenn sie ihre Bindung zur Sonne verliert, d. h. wenn ihr der Betrag ihrer Bindungsenergie ( $E_{\text{pot}}$ ) zugeführt wird. Dieser beträgt

$$E_{\text{pot}} = \frac{-\gamma \cdot M_S \cdot m}{r} = \frac{-6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\text{kg s}^2 \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}} = -53,042 \cdot 10^{32} \text{ Nm}.$$

Die Sonne könnte vom kinetischen Energievorrat Jupiters etwa 13 Jahre leuchten, was sich einfach aus dem Quotienten von kinetischer Energie und Strahlungsleistung ergibt.

$$t = \frac{E_{\text{kin}}}{L_S} = \frac{1620,7 \cdot 10^{32} \text{ Nm} \cdot \text{s}}{3,846 \cdot 10^{26} \text{ Nm}} \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 13 \text{ a}.$$

Der Energieerhaltungssatz der Mechanik besagt eigentlich, dass die kinetischen Energien und die potentielle Energie aller Körper des Sonnensystems (als abgeschlossenes System) in ihrer Summe erhalten bleiben. Dabei ist berücksichtigt, dass dies für einen einzeln betrachteten Körper (z. B. einen Kometen) nicht gelten muss, da er ja Energie „tanken“ kann, wenn er z. B. dicht an Jupiter vorbeifliegt. Für die folgende Rechnung werden solche Wechselwirkungen ausgeschlossen. Die Energieerhaltung wie auch der Virialsatz gelten dann für jedes einzelne Objekt (Vereinfachung). Der Energieerhaltungssatz lautet

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E = \text{konstant},$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 - \gamma \cdot M_S \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r} \right) = \text{konstant}.$$

Für die Kreisbahnen der Planeten (Ellipsenform fast nicht wahrnehmbar) ist der Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie von vornherein ausgeschlossen, so dass die Energie sogar in ihren Formen erhalten bleibt. Bemerkenswert ist lediglich, dass die Gesamtenergie  $E$  eines Himmelskörpers auf einer Kreisbahn jeweils gerade seiner negativen kinetischen Energie entspricht. Auf der lang gestreckten Ellipsenbahn des Kometen Encke kommt es dagegen zu einem deutlichen Austausch zwischen den beiden Energieformen. Im folgenden werden die Energien in den Extrempunkten der Kometenbahn ( $r_p$ ...Perihel und  $r_A$ ...Aphel) berechnet und in ihrer jeweiligen Summe miteinander verglichen.

$$\begin{aligned} \text{Encke im Perihel: } E_p &= \frac{m}{2} \cdot v_p^2 - \gamma \cdot M_s \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_p} \right) \\ &= \frac{3 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{2} \cdot \left( 69320 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{0,51 \cdot 10^{11} \text{ m}} \approx -0,599. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Encke im Aphel: } E_A &= \frac{m}{2} \cdot v_A^2 - \gamma \cdot M_s \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_A} \right) \\ &= \frac{3 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{2} \cdot \left( 5760 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{6,134 \cdot 10^{11} \text{ m}} \approx -0,599. \end{aligned}$$

Mit  $E_p = E_A$  ist die Energieerhaltung bewiesen.

Die Gültigkeit des Virialsatzes lässt sich für die Planeten schnell ersehen, da die berechneten Werte für  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$  zugleich ihren zeitlichen Mittelwerten entsprechen.

$$\overline{E_{\text{kin}}} = -\frac{1}{2} \overline{E_{\text{pot}}} \Rightarrow \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{Erde: } \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{26,521 \cdot 10^{32} \text{ Nm}}{-53,042 \cdot 10^{32} \text{ Nm}} \approx -0,5,$$

$$\text{Jupiter: } \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{1620,7 \cdot 10^{32} \text{ Nm}}{-3238,4 \cdot 10^{32} \text{ Nm}} \approx -0,5.$$

Im Falle der Ellipsenbahn des Kometen Encke weichen die Werte für das Virial bei Momentaufnahmen der Bahn wie zu erwarten stark von -0,5 ab.

$$\text{Encke im Perihel: } \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{7,208 \cdot 10^{25} \text{ Nm}}{-7,807 \cdot 10^{25} \text{ Nm}} \approx -0,923,$$

$$\text{Encke im Aphel: } \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{0,0498 \cdot 10^{25} \text{ Nm}}{-0,649 \cdot 10^{25} \text{ Nm}} \approx -0,077.$$

Ein zeitlich gemitteltes Virial lässt sich erhalten, wenn man die Energien nach ihrer zeitlichen Häufigkeit in die Rechnung eingehen lässt. Im Perihel läuft der Komet sehr schnell und entsprechend wird ein sehr kurzer Bahnabschnitt (für den das Virial konstant sein soll) auch schnell durchlaufen (kleines zeitliches Gewicht). Im Aphel dagegen ist der Komet um den Faktor, der dem Verhältnis der Bahngeschwindigkeiten ( $v_p / v_A$ ) entspricht, länger auf diesem Bahnstück unterwegs (großes zeitliches Gewicht). Die entsprechende Rechnung ergibt:

$$\frac{\overline{E_{\text{kin}}}}{\overline{E_{\text{pot}}}} = \frac{7,208 \cdot 10^{25} \text{ Nm} + (69320 / 5760) \cdot 0,0498 \cdot 10^{25} \text{ Nm}}{-7,807 \cdot 10^{25} \text{ Nm} + (69320 / 5760) \cdot -0,649 \cdot 10^{25} \text{ Nm}} \approx -0,5.$$