

Das Schwarzschild-Kriterium im Modellversuch

Intro

Konvektionsvorgänge gehören zum irdischen Alltag. In Modellversuchen mit Salzwasserschichtungen kann man die Konvektion in Flüssigkeiten ausschalten und sich dabei das Prinzip, das dem *Schwarzschildkriterium* zu Grunde liegt, veranschaulichen. Die Folgen einer unterdrückten Konvektion sind dabei ähnlich wie im Sonneninneren: die Energie aus den tiefer gelegenen Schichten wird nicht mehr so schnell abtransportiert.

Vorüberlegungen

Der Leser sei gleich zu Beginn darauf hingewiesen, dass das Thema „Konvektion“ schon einmal Gegenstand eines WiS!-Beitrages war. Im Artikel „Konvektion als universelles Phänomen“ (<http://www.wissenschaft-schulen.de/artikel/713578>) findet man insbesondere eine elementare Herleitung des Temperaturgefälles der irdischen (konvektiven) Troposphäre. Bei den nachfolgenden Betrachtungen sollen vor allem **Modellexperimente und Analogiebetrachtungen zum Schwarzschild-Kriterium** im Vordergrund stehen. Im Abschnitt „Die Wahl von Modellschichten...“ soll ein „Schwarzschildkriterium“ für Gas- oder Flüssigkeitsschichtungen unterschiedlicher Dichte formuliert werden. Im Abschnitt „Ein Konvektionsexperiment“ findet sich die Anleitung zur Durchführung eines Modellversuches.

| Übersicht der Bezüge zum WiS-Beitrag | | |
|--------------------------------------|---------------|---|
| Physik | Mechanik | Dichte von Stoffen Auftriebskraft Gewichtskraft Archimedisches Prinzip |
| Physik | Thermodynamik | Kalorimetrie thermische Volumenausdehnung Wärmestrahlung, -leitung |
| Astronomie | Sterne | innerer Aufbau Energietransport durch Konvektion und Strahlung |

Die Konvektion unter heuristischen Gesichtspunkten

So kompliziert die mathematische Analyse der Konvektion im Einzelnen auch sein mag, im Grunde fungiert ein einfacher physikalischer Zusammenhang als Auslöser eines Konvektionsprozesses: Ist die Dichte ρ_e eines gesonderten Volumenelementes V geringer als die Dichte seiner Umgebung, dann ist die auf dieses Volumenelement wirkende Auftriebskraft größer als seine Gewichtskraft – es beginnt zu steigen. Nach dem Archimedisches Prinzip ist die Gewichtskraft $F_G = \rho V g$ des verdrängten Luft- oder Flüssigkeitsvolumens V gleich der Auftriebskraft – dieser Satz gilt auch, wenn verdrängte oder verdrängende Materie aus dem gleichen Stoff bestehen. Mithin gilt für die Auftriebskraft die Gleichung:

$$F_A = \rho V g \quad (1)$$

während für die Gewichtskraft des betrachteten Volumenelementes der Zusammenhang

$$F_G = \rho_e V g \quad (2)$$

besteht. Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich die beiden Gründe, weshalb Konvektion entsteht oder unterdrückt wird, sofort herauslesen. Zum einen haben wir Konvektion, wenn $\rho_e < \rho$, zum anderen – an diesen Grund denkt man vielleicht zunächst nicht – wenn $g=0$ ist. Im schwerelosen Zustand wirken keine Beschleunigungen, somit auch keine Kräfte und das betreffende Volumenelement verbleibt am Ort. Der letzte Fall stellt bekanntlich in Raumschiffen ein gewisses Problem dar, wo durch Zwangsbelüftung CO_2 -angereicherte Atemluft abgepumpt werden muss. Dieser Problematik werden wir hier aber nicht weiter nachgehen.

Wie bereits im SuW-Beitrag dargestellt ist, lässt sich in der oberflächennahen Gashülle der Erde die Konvektion praktisch nur mit großem Aufwand „abschalten“. Um die Bedingungen im Inneren eines Sterns zu simulieren, wo dies unter Umständen ja realisiert ist, bedarf es also eines Modellversuches.

Die Wahl von Modellschubstanzen – eine Abschätzung für die Hand des Schülers

Das Ziel des Modellversuches soll sein, die Konvektionsbewegung zu unterdrücken. Dazu muss in einem Gefäß eine spezielle Übersichtung von wenigstens zwei Stoffen unterschiedlicher Dichte hergestellt werden, die von unten her über eine Heizplatte erwärmt wird (Abb. 1-3). Oben sei zu Beginn der Erwärmung der Stoff geringerer Dichte, unmittelbar über der Heizplatte befindet sich der Stoff mit hoher Dichte. Eine realistische Temperaturzunahme für einen solchen Schulversuch dürfte etwa 60K betragen.

Für eine kurze Zeitspanne sollte man die Wärmeleitung und Strahlung vernachlässigen dürfen. Unter dieser Voraussetzung „landet“ die gesamte zugeführte Wärme im bodennahen Material, das sich erwärmt und ausdehnt. Die Frage ist nun, ob bei dieser Ausdehnung die Dichte im weiter oben aufgeschichteten Medium unterschritten wird oder nicht. Im letzteren Fall wird die Konvektion unterdrückt. Bei bekanntem Volumenausdehnungskoeffizienten γ berechnet sich die Dichte nach Temperaturerhöhung um ΔT mit Hilfe folgender Gleichung:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma\Delta T)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma\Delta T} \quad (3)$$

(ρ_0, V_0 : Dichte und Volumen vor der Erwärmung). Wir wollen die Konvektion (bei Temperaturerhöhung um 60K) unterdrücken; bezeichnet ρ_u die Dichte der übersichteten Flüssigkeit, muss gelten $\rho/\rho_u > 1$:

$$1 < \frac{\rho}{\rho_u} = \frac{\rho_0}{\rho_u(1 + \gamma\Delta T)} \quad (4)$$

oder

$$60K = \Delta T < \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} - 1 \right) \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) bzw. (5) stellen gewissermaßen das Schwarzschildkriterium für das Modellexperiment dar. Wenn die Konvektion unterdrückt ist, wird die Wärme vertikal durch die Flüssigkeit lediglich durch Wärmeleitung und -strahlung übertragen (In der Sonne ist die Wärmeleitung zu vernachlässigen, die Entscheidung fällt zwischen Strahlung und Konvektion).

Mit der Gleichung (5) kann man nun theoretisch verschiedene Stoffkombinationen probieren. Für das angedachte Experiment behalte man die Siedetemperatur und eine mögliche Brennbarkeit von Substanzen im Auge! Für Gase gilt in etwa ein einheitlicher Volumenausdehnungskoeffizient von $\gamma=0,003661 \text{ K}^{-1}=1/273,15\text{K}^{-1}$, alle Gasschichtungen, die ein Dichteverhältnis von $\rho_0/\rho_{\text{ü}} \cong 1,22$ oder größer aufweisen, sind nach Ungleichung (5) stabil geschichtet. Relativ leicht lassen sich verschiedene Gase finden, die diese Bedingung erfüllen, die praktische Realisierung des entsprechenden Konvektionsversuches gestaltet sich aber recht kompliziert. Insbesondere erweist sich das Herstellen und die Beobachtung der Gasschichtung als schwierig. Daher gilt die experimentelle Empfehlung der Verwendung von Flüssigkeitsschichtungen. Diese kann man erzeugen, indem man die zu überschichtende Flüssigkeit vorsichtig aus einem Schlauch über eine Sperrholzbrettchen rinnen lässt, das auf der schon eingefüllten Flüssigkeit großer Dichte schwimmt.

Bei Flüssigkeiten wäre beispielsweise Glycerin, überschichtet mit Wasser, eine denkbare Alternative. Eine kräftige Kochsalzlösung, die mit reinem Wasser überdeckt wird, erfüllt den gleichen Zweck. Das in den Abbildungen gezeigte Experiment wurde auf diese Weise durchgeführt.

Ein Konvektionsexperiment

Den Versuchsaufbau zeigt die Abb. 1.: Über eine elektrische Heizplatte wird eine Metallplatte gelegt, auf der zwei hitzebeständige Bechergläser stehen. Metallbehälter scheiden nicht nur wegen der Beobachtbarkeit des Experiments aus. Sie würden die Wärme an den Gefäßwänden nach oben leiten und dadurch das Experiment verfälschen. Zweckmäßig verwendet man Lebensmittelfarbe, Kaliumpermanganat oder Tintenfarbe, um die Konvektion – bzw. ihr Ausbleiben – sichtbar zu machen. Neben der Überschichtung aus Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte (rote Färbung) dient ein Gefäß mit Wasser, in dem es zur Konvektion kommt, als Vergleichsobjekt. Unmittelbar nach dem Einschalten der Heizplatte wirft man eine Tintenpatrone in das Gefäß mit Wasser. Die aufsteigende blaue Farbe macht die sogleich einsetzende Konvektion sichtbar. In der Salzwasserschichtung findet keine Konvektion statt.

Sicherheitshinweis: Bei zu starker Erwärmung wird die Siedetemperatur der unteren Flüssigkeit überschritten! Die aufgeschichtete Flüssigkeit wirkt unter Umständen wie ein Deckel auf einem Schnellkochtopf. Es kann zu einem Siedeverzug kommen. Mit einem Glasthermometer kann man die Temperatur der unteren Schicht überwachen.

Einen **Kurzfilm des Experimentes** finden Sie in den angehängten Materialien.



Abb. 1: Der Versuchsaufbau



Abb. 2: Einsetzende Konvektion im Wassergefäß



Abb. 3: In der linken Flüssigkeit kommt es zu einer ausgeprägten Konvektion. Die Salzwasserschichtung rechts ist gegen Konvektion stabil.