Der Virialsatz - nicht in der Schule gelernt und trotzdem nachvollziehbar

In der Formelsprache lautet der Virialsatz, der den Proporz von kinetischer und potentieller Energie in einem abgeschlossenen System im Zeitmittel beschreibt

$$\overline{E_{\text{kin}}} = -\frac{1}{2}\overline{E_{\text{pot}}}.$$

Auch wenn der Virialsatz nicht zum Schulstoff gehört, man kann sich ihm trotzdem nähern, indem man den Sonderfall der Kreisbahnbewegung z. B. für einen Planeten um die Sonne hernimmt. Nun kann das Zeitmittel wegfallen, da sich sowohl die für E_{kin} ausschlaggebende Bahngeschwindigkeit als auch der für E_{pot} maßgebliche Abstand nicht ändern.

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}}.$$

Die Bewegungsenergie eines um die Sonne kreisenden Planeten soll also die Hälfte der negativen potentiellen Energie ausmachen. Hier stört uns zunächst das Minuszeichen. Wie kann potentielle Energie negativ sein und wie berechnet sich die potentielle Energie eigentlich für einen Planeten? Diese Fragen finden im Abschnitt potenergie.doc eine Antwort. Für die potentielle Energie eines Planeten hinsichtlich seiner Bindung an die Sonne erhält man

$$E_{\text{pot}} = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r}\right).$$

Je näher ein Planet der Sonne ist (je kleiner r bei gegebener Planetenmasse wird), desto kleiner wird seine potentielle Energie (ihr negativer Wert wird größer) und desto größer wird die Bindungsenergie (stärkere Bindung des Planeten). Erfolgt die Verschiebung des Planeten umgekehrt von r nach unendlich, so wird potentielle Energie angelegt und die Bindungsenergie wird reduziert (Bindung wird schwächer).
Nun können die Berechnungsvorschriften für die Energieformen in den Virialsatz eingesetzt und die Gleichung mit $2/r$ multipliziert werden.

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{m\cdot v^2}{r} = \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}.$$

Im Ergebnis steht die bekannte Gleichheit von Zentripetalkraft und Anziehungskraft für die Kreisbahn, deren Gültigkeit der Beleg für die Gültigkeit des Virialsatzes ist. Zur Präsentation der dargestellten Zusammenhänge steht einen Illustration zum Nachweis der Gültigkeit des Virialsatzes (z. B. als Folienvorlage) zur Verfügung.

Was wäre, wenn für die Gravitationskraft gelten würde $F \sim 1/r^3$ oder $F \sim 1/r^n$? (eine Sonderaufgabe)

In diesem Falle ergäbe sich die potentielle Energie aus

$$E_{\text{pot}} = \int_{\infty}^{r_1} F\cdot \mathrm{d}r = \gamma\cdot M\cdot m\cdot\int_{\infty}^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = -\gamma\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r_1^{\,2}}\right).$$

Für eine Kreisbahn, bei der die Zentripetalkraft gleich der Gravitationskraft ist, würde gelten

$$\frac{m\cdot v^2}{r} = \gamma\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r^3}.$$

Nach Multiplikation mit $r/2$ würde man zu den Energien gelangen.

$$\frac{m\cdot v^2}{2} = \gamma\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2},$$

$$E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}}.$$

In diesem Falle hätte man also den Faktor -1.
In allgemeinen Falle ($F \sim 1/r^n$) ergäbe sich der Faktor $-(n-1)/2$.