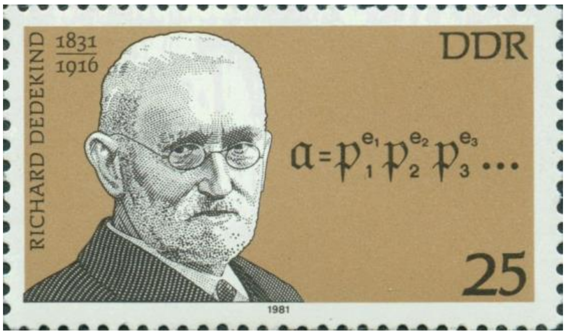
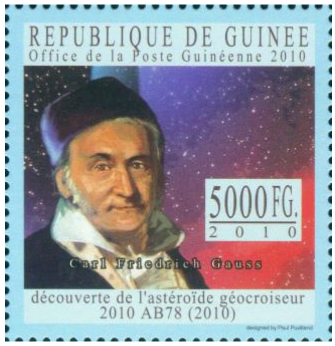
Oktober 2011

Vor 180 Jahren geboren **Richard Dedekind** (06.10.1831 – 12.02.1916)



Der Lebensweg des Julius Wilhelm Richard Dedekind beginnt und endet in Braunschweig: Als viertes Kind eines Jura-Professors des *Collegium Carolinum* geboren, besucht er ab dem siebten Lebensjahr das *Martino-Katherineum*, ein traditionelles Gymnasium der Stadt. Im Alter von 16 Jahren wechselt der auch musikalisch hochbegabte Schüler auf das *Collegium Carolinum*, eine Bildungsinstitution, die dem Übergang vom Gymnasium zur Universität dient, und bereitet sich dort auf ein Studium der Mathematik vor.

1850 geht er dann nach Göttingen, wo er mit Begeisterung die Experimentalphysik-Vorlesungen von Wilhelm Weber verfolgt und Carl Friedrich Gauss in einer Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate kennenlernt, der in seinen letzten Lebensjahren fast nur noch Veranstaltungen zur Astronomie durchführt. In nur vier Semestern verfasst Dedekind seine Doktorarbeit zur Theorie der Euler'schen Integrale – er ist Gauss' letzter Doktorand. Parallel zu Bernhard Riemann, der kurz zuvor ebenfalls bei Gauss promoviert hatte, arbeitet er an seiner Habilitationsschrift. Nach Erhalt der *venia legendi* hält er ab 1854 Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie und Geometrie.



Seit Beginn seines Aufenthalts in Göttingen hat Dedekind bemerkt, dass die mathematische Fakultät, an der zu dieser Zeit vor allem Lehrer für Höhere Schulen ausgebildet werden, den Anschluss an die aktuellen mathematischen Entwicklungen verloren hat – im Unterschied zur Universität in Berlin, an der Peter Gustav Lejeune Dirichlet lehrt. Als Gauss 1855 stirbt, wird Dirichlet als dessen Nachfolger nach Göttingen berufen. Dedekind arbeitet eng mit ihm zusammen; wissbegierig besucht er dessen Vorlesungen, u. a. über Zahlentheorie und Partielle Differenzialgleichungen.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Als 1858 das Polytechnikum in Zürich (heute: ETH) europaweit Professorenstellen für Mathematik ausschreibt, bewerben sich u. a. DEDEKIND und RIEMANN. DIRICHLET sieht bei DEDEKIND den Vorteil, dass dieser – im Unterschied zu RIEMANN – auch Erfahrungen in Vorlesungen mit „elementaren" Inhalten auch für „ungeübtere Hörer" gesammelt hat. Seine Vorlesungen zeichnen sich, wie er schreibt, „durch Klarheit, Bestimmtheit und Lebendigkeit aus". Ein Schweizer Schulrat besucht beide und stellt fest, dass RIEMANN „zu stark in sich gekehrt (sei), um zukünftige Ingenieure zu lehren". Daher gibt man DEDEKIND den Vorzug gegenüber RIEMANN.

Bei der Vorbereitung seiner Vorlesungen in Zürich wird DEDEKIND bewusst, dass die arithmetischen Grundlagen der Differenzialrechnung bisher nur unbefriedigend geklärt sind – so entwickelt er die Idee, reelle Zahlen durch die (heute so genannten) „DEDEKIND'schen Schnitte" in den rationalen Zahlen zu definieren.

Von seiner Tätigkeit in Zürich ist DEDEKIND jedoch bald enttäuscht. Er hatte erwartet, dass die Studenten seine Vorlesungen aufmerksam und mit besonderem fachlichem Interesse verfolgen; stattdessen muss er sich mit dem „kindischen Benehmen" auseinandersetzen, das einige von ihnen an den Tag legen. Als 1861 das *Collegium Carolinum* in Braunschweig zu einer polytechnischen (Hoch-) Schule erweitert und eine Professur für Mathematik ausgeschrieben wird, bewirbt er sich zurück in seine Heimatstadt, mit dem ausdrücklichen Wunsch, nie wieder „niedrige Mathematik" lehren zu müssen. Seine Bedingung wird akzeptiert, und von da an ist DEDEKIND bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1894 in Braunschweig tätig; alle Angebote, auch solche aus Göttingen, lehnt er ab. Anfang der 1870er-Jahre erfolgt die Umwandlung des *Collegium Carolinum* in die *Herzogliche Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina* ; DEDEKIND wird zum ersten Direktor ernannt. Als der Herzog den Neubau der Hochschule bewilligt, übernimmt er die Leitung der Baukommission.

1872 veröffentlicht DEDEKIND die Schrift *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, in der er seine bereits in Zürich entwickelte Idee des „Schnitts" darlegt. (Was DEDEKIND dort *Stetigkeit* nennt, wird heute mit dem Begriff *Vollständigkeit* bezeichnet.)

Kern dieser Idee ist die folgende Überlegung: Die Zahlengerade enthält offensichtlich keine Lücke. Wählt man irgendeinen Punkt P aus, dann kann dieser einer rationalen oder einer irrationalen Zahl zugeordnet werden. Jeder Punkt unterteilt die Zahlengerade in zwei Teile: *Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.*

Entsprechend zerlegt eine rationale Zahl a die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in zwei Teilmengen A_1 und A_2; alle Elemente der „Unterklasse" A_1 sind sämtlich kleiner als alle Elemente der „Oberklasse" A_2. Gleichgültig, ob man die betrachtete rationale Zahl a zur Unterklasse (als größte Zahl von A_1) oder zur Oberklasse (als kleinste Zahl von A_2) hinzuzählt: Durch die rationale Zahl a wird die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen geteilt. Auch jede irrationale Zahl b, beispielsweise $\sqrt{2}$, teilt die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in zwei Teilmengen A_1 und A_2; die Elemente der Unterklasse A_1 sind sämtlich kleiner als die betrachtete irrationale Zahl b, und diese wiederum ist kleiner als alle Elemente der Oberklasse A_2: $A_1 = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ und $A_2 = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$.

Die Unterklasse zu einer irrationalen Zahl *b* besitzt allerdings kein größtes, die Oberklasse kein kleinstes Element; die irrationalen Zahlen bilden also in diesem Sinne die „Lücken" zwischen den beiden Teilmengen aus rationalen Zahlen: *„In dieser Eigenschaft, dass nicht alle Schnitte durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, besteht die Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des Gebietes R aller rationalen Zahlen. Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, irrationale Zahl α, welche wir durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen …"*.
Auch die Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen und die Rechenoperationen führt DEDEKIND auf solche mit den Schnitten zurück.
Aus einer zufälligen Urlaubsbegegnung im Jahr 1874 mit GEORG CANTOR, dem Begründer der Mengenlehre, entsteht eine enge Brieffreundschaft. DEDEKINDS Beitrag zur Theorie der unendlichen Mengen ist der Satz: *Eine Menge ist unendlich, wenn diese Menge ähnlich* (in heutiger Sprechweise: *gleichmächtig*) *ist zu einer echten Teilmenge von sich selbst*. Beispielsweise ist die Menge der natürlichen Zahlen ℕ gleichmächtig zu einer Teilmenge, der Menge der Quadratzahlen {1, 4, 9, 16, …}, da die Zuordnung $n \to n^2$ und die Umkehrzuordnung $n^2 \to n$ in ℕ eindeutig sind. Aus der Beschäftigung mit diesen Grundlagen der Mathematik entsteht 1888 die Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen*. In diesem Beitrag versucht er, den Aufbau der natürlichen Zahlen durch mengentheoretische Überlegungen zu begründen. Für ihn sind … *Zahlen … freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen*. GIUSEPPE PEANO übernimmt diese Ansätze im Wesentlichen in sein Axiomensystem, das er 1889 veröffentlicht.

Bereits während seiner Tätigkeit als Dozent in Göttingen hatte sich DEDEKIND mit algebraischen Strukturen beschäftigt und als einer der Ersten überhaupt die GALOIS'sche Theorie zum Bestandteil seiner Vorlesung gemacht. 1863 hatte er damit begonnen, die *Vorlesungen über Zahlentheorie* von DIRICHLET herauszugeben. 1879 ergänzt er diese Schrift um den Beitrag *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, der sich mit den Eigenschaften von Zahlkörpern beschäftigt. Seit über 100 Jahren hatten sich Mathematiker mit der Frage beschäftigt, ob auch in anderen Zahlbereichen Eigenschaften gelten, wie sie durch den Hauptsatz der Arithmetik für die Menge ℕ beschrieben werden: *Jede natürliche Zahl größer als 1 lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.* DEDEKIND zeigt, dass allgemein ein analoger Satz für (sogenannte) Zahlringe gilt: *Für jedes echte Ideal a existiert eine Zerlegung in Primideale $p_1, p_2, p_3, \ldots : a = p_1^{e1}\, p_2^{e2}\, p_3^{e3} \ldots$* (vgl. DDR-Briefmarke).
Die enorme Lebensleistung DEDEKINDS, insbesondere seine bahnbrechenden Entdeckungen in Algebra und Zahlentheorie, wird durch zahlreiche Ehrungen in- und ausländischer Institutionen gewürdigt. Als 1914 der Weltkrieg ausbricht, weigert sich DEDEKIND, ein die Kriegsziele verherrlichendes Manifest der deutschen Intellektuellen zu unterschreiben – die französische Akademie der Wissenschaften

dankt es ihm auf besondere Weise: Als DEDEKIND 1916 stirbt, ist sie die erste, die – trotz des Kriegszustandes mit Deutschland – einen ehrenden Nachruf veröffentlicht.