

Eine gute Plausibilitätserklärung kenne ich nicht, aber der Beweis ist relativ einfach.

Im Bild auf S. 64 unten sei der Nullpunkt der x -Achse an der rechten Kante des obersten Klotzes. Dann ist die Behauptung: Wenn der Schwerpunkt des k -ten Klotzes bei $-\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j}$ liegt, dann liegt der gemeinsame Schwerpunkt der Klötze 1 bis m am rechten Rand des $(m+1)$ -sten Klotzes, das heißt bei $-\sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j}$. (Es geht natürlich auch ohne die Minuszeichen, aber so kann man die Rechnung besser mit dem Bild abgleichen.)

Beweis durch Induktion: Für $m = 1$ ist die Behauptung offenbar zutreffend. Nehmen wir an, die ersten m Klötze liegen so, wie es der Behauptung entspricht. Dann ist ihr gemeinsamer Schwerpunkt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=j+1}^m \frac{1}{2^j} \\ & \text{(summiere das Dreieck aus Zahlen spalten- statt zeilenweise)} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{m-j}{2^j} \\ &= -\sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Christoph Pöppe, Redaktion